BACK

Hans-Georg Weigand, Universität Gießen

Zur Bedeutung graphischer Darstellungen für das Überprüfen von Vermutungen

Der Aufbau heuristischer Fähigkeiten im Mathematikunterricht soll die Kreativität von Schülern entwickeln und ihre Leistungsfähigkeit vor allem beim Lösen von Problemen verbessern. Um dieses Ziel zu erreichen, muß der Schüler aktiv eigene Erfahrungen sammeln und selbständig Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten entdecken können. Im Rahmen eines derartigen 'entdeckenden Lernens' betrachtet WINTER (1989) insbesondere das **Kombinieren** und **Iterieren** als grundlegende Arbeitsweisen für das Entdecken von neuen Gegenständen, Figuren, Termen oder Sätzen (S. 194). Er stellt dann in diesem Zusammenhang auch die aktuelle Frage, inwieweit "der Gebrauch von Computern zur Verbesserung des Unterrichts im Sinne der Förderung selbständigen, entdeckenden Lernens beitragen" (S. 197) kann. Im folgenden sollen am Beispiel des Arbeitens mit **verketteten Funktionen** und **Iterationen** Chancen und Möglichkeiten aufgezeigt werden, die der Computereinsatz im Rahmen eines heuristisch orientierten, entdeckenden Mathematikunterrichts eröffnen kann.

1. Verkettete Funktionen

In verschiedenen empirischen Untersuchungen mit Studienanfängern verschiedener Fachrichtungen, etwa Medizinstudenten (NÄGERL u. a. 1973) oder Studienanfängern des Faches Physik (KRAUSE u. a. 1981), und mit Oberstufenschülern (WEIGAND 1989) zeigten sich die mangelnden Fähigkeiten von Schülern und Studenten beim Umgang mit Funktionen und deren Verknüpfungen sowie beim qualitativen Argumentieren über die Eigenschaften derartiger Funktionen. So sollten die Testteilnehmer bei NÄGERL u. a. etwa Graphen zu Funktionen mit $f(x) = A \sin \omega t$ bei verschiedenen Parametern A bzw. ω identifizieren, und bei KRAUSE u. a. sollten sie die Graphen der Funktionen mit $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \sin 2x$ bzw. $f(x) = \cos x$ und $f(x) = (\cos x)^2$ in ein vorgegebenes Koordinatensystem skizzieren. Die aufgetretenen Probleme und Schwierigkeiten führen bei KRAUSE u. a. zu dem Ergebnis:

> "Die Testergebnisse zum Bereich 'Umgang mit Funktionsgraphen' muß man als *äußerst unzulänglich* bezeichnen. ... Die Ergebnisse zum Umgang mit Graphen müssen zu den *alarmierendsten Resultaten im Rahmen des Materials, das der Test liefert*, gerechnet werden." (S. 371)

Im Hinblick auf die in einem naturwissenschaftlichen Studium gestellten Anforderungen äußern NÄGERL u. a. den Wunsch "nach besseren Fähigkeiten im Umgang mit Diagrammen" (S. 157) und KRAUSE u. a. erheben die uneingeschränkt zu unterstützende Forderung:

> "Will man effektiv mit Graphen arbeiten, so sollte man die Graphen einiger grundlegender Funktionen beherrschen .... Hinzukommen muß dann die Fähigkeit, daraus qualitativ die Form der Graphen komplizierterer Funktionen gewinnen zu können. Dies sollte in der Regel *ohne* Verwendung einer Wertetabelle geschehen." (S. 356)

Inwieweit kann der Rechnereinsatz im Unterricht zur Entwicklung dieser Fähigkeit beitragen?

Durch die Verfügbarkeit moderner Software ergibt sich heute die Möglichkeit, Graphen beliebiger Funktionen durch 'Knopfdruck' auf dem Bildschirm zu erzeugen. Allerdings garantieren die Verfügbarkeit von Computern im Unterricht und die Möglichkeit, Funktionen unmittelbar nach der Eingabe des Termes auch graphisch darstellen zu können, noch lange nicht, daß die Schüler durch diesen computerunterstützten Unterricht auch ein besseres Begriffsverständnis entwickeln. So zeigte eine vom Verfasser durchgeführte empirische Untersuchung (WEIGAND 1989), daß beim Arbeiten mit dem Computer zum einen die Einbettung der zu lernenden Inhalte in einen geeigneten Problemzusammenhang und zum anderen das selbständige Entdecken unverzichtbare Voraussetzungen für einen dauerhaften Lernerfolg darstellen.

2. Iterationen

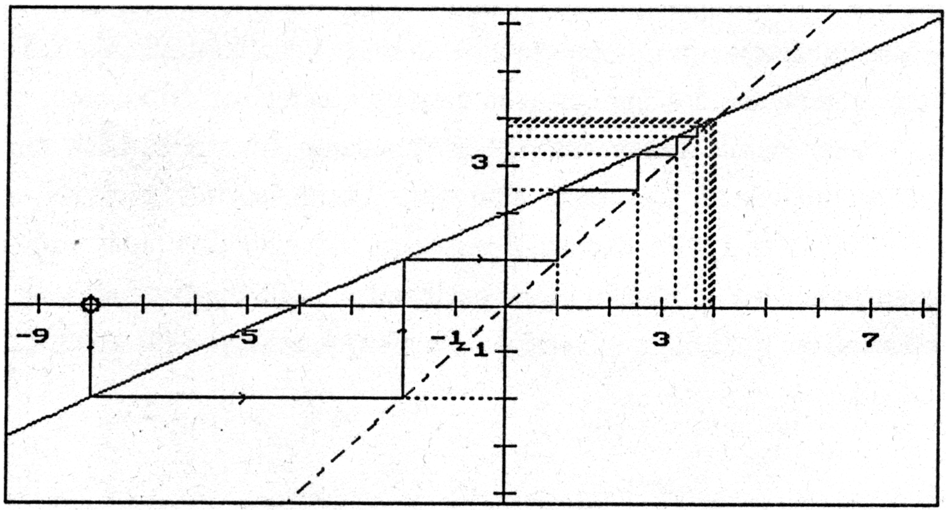
Iterationen sind grundlegende Elemente des gesamten Mathematiklehrgangs. Sie kommen als iterative Denkstrukturen bei der Entwicklung des Zahlbegriffs bereits in der Grundschule vor, sie werden in der Mittelstufe zum näherungsweisen Lösen von Gleichungen verwendet, sie bilden in der Oberstufe den Ausgangspunkt bei der Mathematisierung diskreter dynamischer Prozesse in Form von rekursiv definierten Folgen oder Differenzengleichungen, und sie zählen schließlich in der Informatik zu den grundlegenden Strukturen des Algorithmenbegriffs. Mit dem verstärkten Vordringen von Rechnern in den Unterricht und der Betonung der numerischen Mathematik im Schulunterricht gewinnen insbesondere iterative Verfahren wie das HERON- oder NEWTON-Verfahren wieder an Bedeutung (vgl. etwa BLANKENAGEL 1985). Viele Iterationsfolgen $<a_n>_N$ lassen sich mit einer **Iterationsfunktion** f und einem Startwert $a_1 \in R$ rekursiv durch die Vorschrift beschreiben: $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in N$. Beispielsweise führen Wachstumsvorgänge, wie z. B. das

Bevölkerungswachstum, die Ausbreitung einer Bakterienkultur oder die Verzinsung eines Kapitals auf lineare Funktionen f. Das logistische Wachstum, bei dem die 'Sterberate' proportional zur Populationsgröße ist, läßt sich durch quadratische Funktionen f beschreiben (vgl. DÜRR u. ZIEGENBALG 1984, S. 201ff), und das HERON-Verfahren für die näherungsweise Bestimmung etwa von $\sqrt{2}$ führt auf die Iterationsfunktion mit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

3. Iterationen mit linearen Funktionen

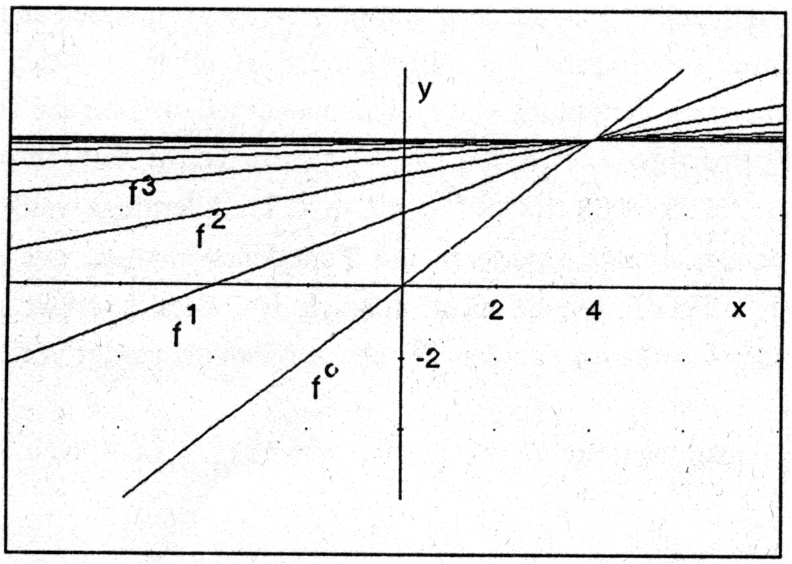
Wenn die Schüler bereits mit Iterationen linearer Funktionen gearbeitet haben, etwa wie in WEIGAND (1992) vorgeschlagen, dann haben sie auch das 'Spinnweben-'Diagramm zur Darstellung der Iterationsfolge mit $x_n = f(x_{n-1})$ kennengelernt.



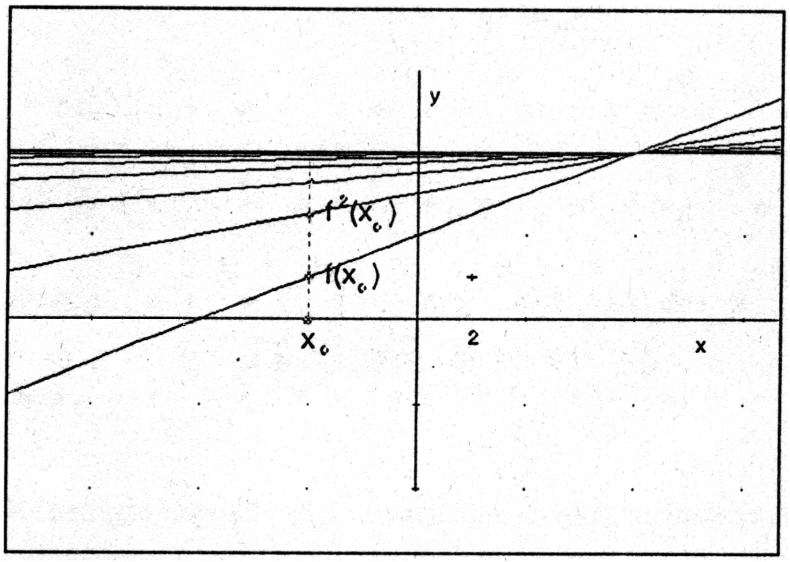
Den Fixpunkt von f erhält man mit Hilfe der Gleichung x = ax + b:

$$x = \frac{b}{1 - a} \quad , \ a \neq 1$$

Der eingezeichnete 'Streckenzug' verdeutlicht dabei den *lokalen Aspekt*, d. h. das Darstellen jeweils *einer* Iterationsfolge zu *einem* bestimmten Startwert. Im folgenden soll demgegenüber der *globale Aspekt* von Iterationsverfahren im Vordergrund stehen. Die Funktionenfolge (f^0, f^1, ...) mit f(x) = ax + b läßt sich mit DERIVE wieder geometrisch darstellen. Bei dem gewählten Beispiel ist a = 0.5 und b = 2:



Hieraus läßt sich zum einen erkennen bzw. vermuten, daß die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ eine 'Grenze' für die Graphen G_n von f^n darstellt und zum anderen, daß alle Graphen G_n durch einen Punkt verlaufen. Um die Bedeutung dieser 'Grenzgeraden' zu erkennen, wird jetzt für einen beliebigen Anfangswert x_0 die Iterationsfolge $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots)$ betrachtet. Die Werte dieser Folge liegen in obigem Diagramm 'senkrecht über x_0' auf den entsprechenden Graphen.



Die Gesamtheit aller Folgen für alle möglichen Startwerte, dargestellt als Punkte im x-y-Diagramm, ist gerade die Menge aller gezeichneten Geraden. Die Annäherung der Graphen G_n an die Gerade mit $y = 4$ verdeutlicht somit die Konvergenz der Iterationsfolge für alle Startwerte. Der Schnittpunkt der Graphen G_n ist dabei gerade wieder, wegen $x_0 = f(x_0)$, der Fixpunkt von f.

Ausgehend von f und g mit $f(x) := ax + b$ und $g(x) := cx + d$ lassen sich mit DERIVE die Verkettungen durch die Eingabe von 'g(f(x))' oder 'gf(x)' in einfacher Weise bilden. Den Term der fortlaufenden Verkettung von f erhält man durch die Eingabe von: 'ff...ff(x)', die (endliche) Termfolge $<f^k(x)>_{k \in \{1, \ldots, n\}}$ mit Hilfe der implementierten Programmiersprache: 'ITERATES (f(x),x,f(x),n)', $n \in \mathbb{N}$. Allerdings werden hierbei 'nur' *Terme* verknüpft, da das direkte Operieren mit Funktionssymbolen, wie etwa bei MATHEMATICA, mit DERIVE (noch) nicht möglich ist. Dies bedeutet aber, daß der Abstraktionsprozeß des Übergangs von den Termen zur Funktion nicht vollzogen wird.

Für die Terme der Funktionenfolge $(f, f^2, \ldots, f^n)$ mit $f(x) := ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ erhält man:

$$
\begin{array}{ll}
1 & a\,x + b \\
2 & a^2\,x + a\,b + b \\
3 & a^3\,x + b\,(a^2 + a + 1) \\
4 & a^4\,x + b\,(a^3 + a^2 + a + 1) \\
5 & a^5\,x + b\,(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \\
6 & a^6\,x + b\,(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \\
7 & a^7\,x + b\,(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \\
8 & a^8\,x + b\,(a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \\
9 & a^9\,x + b\,(a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)
\end{array}
$$

Aus dieser Darstellung können sich verschiedene Fragestellungen ergeben. So läßt sich zum einen die Abgeschlossenheit der Menge der linearen Funktionen gegenüber der Verkettung erkennen. Zum zweiten kann das Steigungsverhalten der Graphen G_n von f^n in Abhängigkeit von a diskutiert werden, und zum dritten führt die Frage nach der Lage der Schnittpunkte von G_n mit der y-Achse auf die Untersuchung geometrischer Reihen. Bezugnehmend auf Achsenspiegelungen S_a und deren Eigenschaft $S_a^2 = id$ sowie auf Deckabbildungen in Form von Drehungen $D = D_{Z, \frac{360}{n}}$ mit $D^n = id$, kann jetzt auch gefragt werden, für welche

Funktionen f $\neq$ id gilt: f^2 = id bzw. f^n = id? Man erhält:

$f^2 = \text{id} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1$ und $(a+1)\cdot b = 0$,

$\Rightarrow \quad a = -1$ und b beliebig.

Die Funktionen f mit $f(x) = -x + b$ sind somit die *involutorischen* unter den linearen Funktionen. Es ist $f = f^{-1}$, und G_f ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Fragt man weiterhin nach Funktionen f mit $f^n = \text{id}$, $n > 2$, so erhält man für $n = 3$ keine Lösung mit f $\neq$ id . Für $n = 4$ ergeben sich dann wiederum 'nur' die involutorischen linearen Funktionen (vgl. KLEMENT 1976).

4. Iterationen mit gebrochen linearen Funktionen

Im folgenden werden Iterationen mit gebrochen lineare Funktionen

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{ax + b}{+ d}$, $\quad c \neq 0$ und $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$, betrachtet.

Die ersten drei Terme der Funktionenfolge $<f^n>_N$ sind:

$$1 \qquad \frac{a x + b}{c x + d}$$

$$2 \qquad \frac{x (a^2 + b c) + b (a + d)}{c x (a + d) + b c + d^2}$$

$$3 \qquad \frac{x (a^3 + 2 a b c + b c d) + b (a^2 + a d + b c + d^2)}{c x (a^2 + a d + b c + d^2) + a b c + d (2 b c + d^2)}$$

Diese Darstellung legt es nahe, die Abgeschlossenheit der Menge der gebrochen linearen Funktionen gegenüber der Verkettung als Verknüpfung zu untersuchen. Tatsächlich läßt sich auch hier eine Gruppenstruktur nachweisen (vgl. REIMERS 1980). Fragt man jetzt nach Funktionen mit f^2 = id, so ergibt sich:

$$b(a+d) = c(a+d) = 0 \text{ und } a^2 = d^2$$

Daraus folgt ($c \neq 0$): $a + d = 0$, also $a = -d$ und b beliebig.

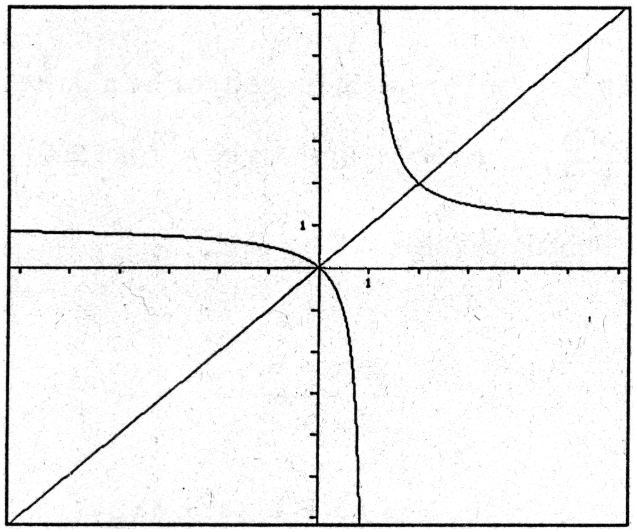
Beispiel:

$$F(x) := \frac{x}{x-1}$$

ITERATES (F (x), x, x, 6)

$$\left[x, \frac{x}{x-1}, x, \frac{x}{x-1}, x, \frac{x}{x-1}, x\right]$$

Diese Termfolge läßt sich mit DERIVE 'auf Knopfdruck' graphisch darstellen.

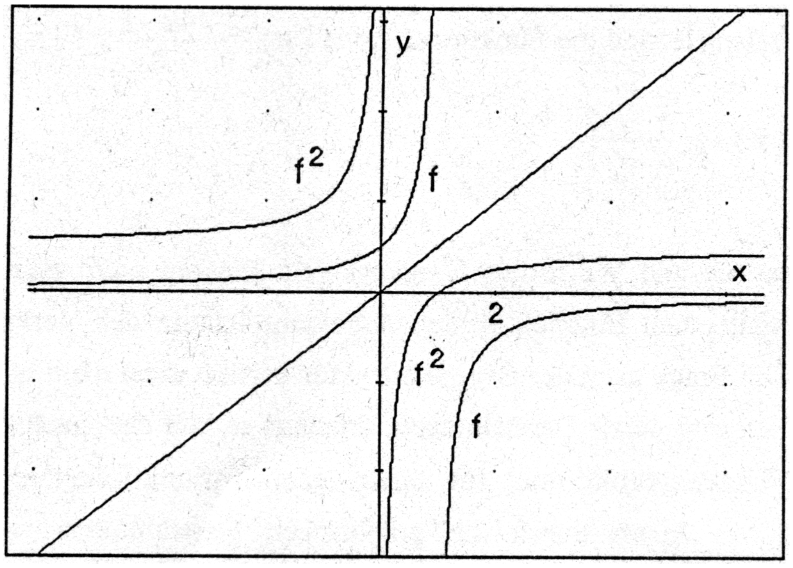


Es ist $f = f^{-1}$, und G_f ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

Fragt man jetzt bei gebrochen linearen Funktionen f nach Funktionen mit $f^3 = id$, so führt dies auf Gleichungen, die nicht mehr in einfacher Weise zu lösen sind. Will man den Schülern trotzdem einen Einblick in den Aspektenreichtum der Verkettung gebrochen rationaler Funktionen geben, so bietet es sich an, die Eigenschaften einer vorgegebenen Funktion und deren Verkettungen zu untersuchen. Beispielsweise erhält man mit Hilfe des DERIVE-Befehls 'ITERATES (f(x),x,f(x),7)' für die ersten 7 Glieder der Termfolge $<f^n(x)>_N$ mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\left[\frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, x, \frac{1-x}{x}\right]$$

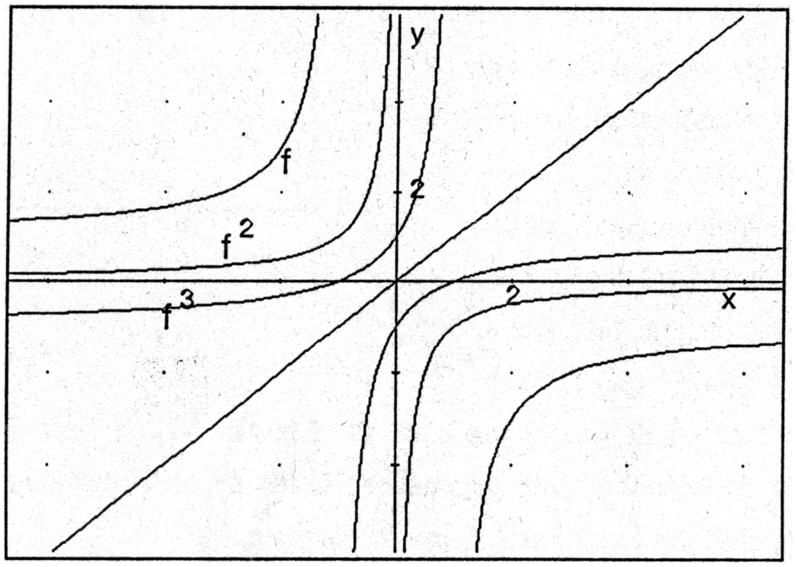
Als graphische Darstellung erhält man:



Es ist also f^3 = id, und ({id, f, f^2}; o) ist eine Gruppe der Ordnung 3. Wegen $f^2$of = id ist f^2 das inverse Element (f^{-1}) zu f, folglich liegen die Graphen von f^2 und von f zueinander symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

Als weiteres Beispiel wird die Iteration der Funktion f mit $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ betrachtet. Hier gilt: f^4 = id:

$$\left[\frac{x-1}{x+1},\ -\frac{1}{x},\ \frac{x+1}{1-x},\ x,\ \frac{x-1}{x+1},\ -\frac{1}{x}\right]$$



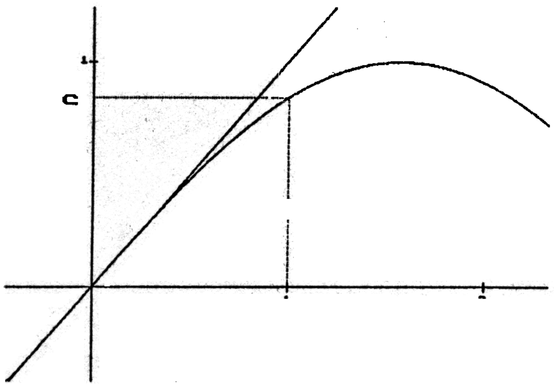
Schließlich gibt es auch gebrochen lineare Funktionen, für die die Gleichung f^n = id für kein

$n \in \mathbb{N}$ erfüllbar ist. Beispiele sind die Funktionen mit $f(x) = \frac{4x+1}{x}$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$ oder die Funktion mit $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

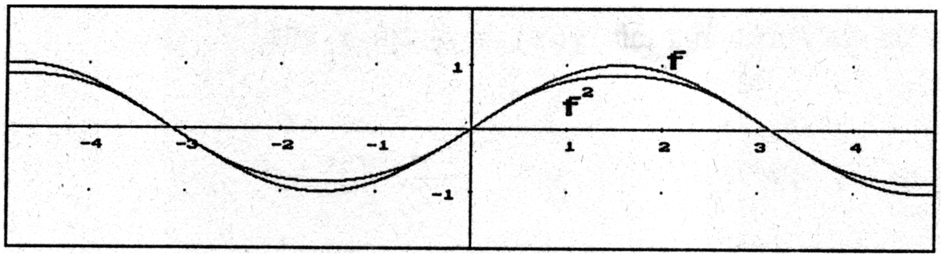
Die hier dargestellte Art und Weise des Umgangs mit linearen oder gebrochen linearen Funktionen kann somit einen Einblick in den Aspektenreichtum der Verknüpfungen von Funktionen geben. Die Frage nach der Gruppenstruktur vertieft dann nicht nur den Umgang mit Umkehrfunktionen und deren Darstellungen, sondern es läßt sich auch die Frage nach der Existenz von Umkehrfunktionen für einen ganzen Funktionentyp beantworten. Schließlich werden vor allem durch die graphischen Darstellungen auch inhaltliche Vorstellungen von Umkehrfunktionen entwickelt.

5. Heuristische Überlegungen zu iterierten Funktionen - Beispiel: Die Sinusfunktion

Ausgehend von der Funktion mit $f(x) = \sin x$ soll nach den Eigenschaften der Funktion $f^2(x) = \sin(\sin(x))$ gefragt werden. Wie sieht der Graph dieser Funktion aus? Dieser Frage stehen selbst die meisten Lehramtsstudenten des Faches Mathematik zunächst hilflos gegenüber, was auf die mangelnde Gewohnheit mit derartigen Problemstellungen hindeutet. Folgende Überlegungen könnten angestellt werden:

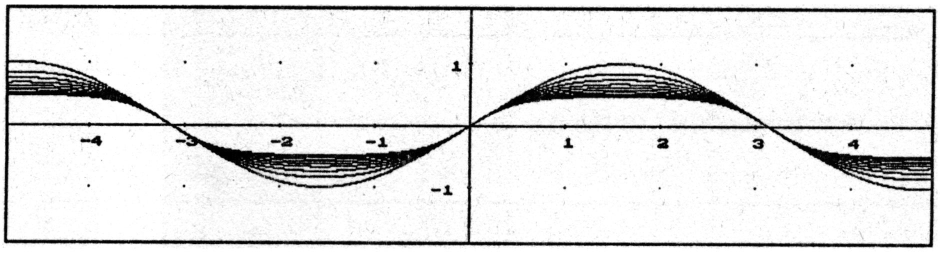


f hat die Periode 2π und somit gilt auch $f^2(x+2\pi) = \sin(\sin(x+2\pi)) = \sin(\sin(x)) = f^2(x)$. Die Nullstellen von f sind auch Nullstellen von f^n. Der Wertebereich von f ist $[-1,1]$. Welchen Wertebereich hat f^2? Auf $]0,1]$ liegt der Graph von f stets unterhalb der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten (entsprechend wird der Bereich $[-1,0[$ betrachtet). Somit gilt für alle $x \in]0,1]$: $|f^2(x)| < |f(x)|$. Der Wertebereich von f^2 ist somit $[-c, c]$ mit $c < 1$. f hat in $[-1, 1]$ bzw. $[-c, c]$ nur die Nullstelle $x = 0$, für f^n kommen somit gegenüber f keine neuen Nullstellen hinzu. In der folgenden Abbildung sind die Funktionen f und f^2 dargestellt:

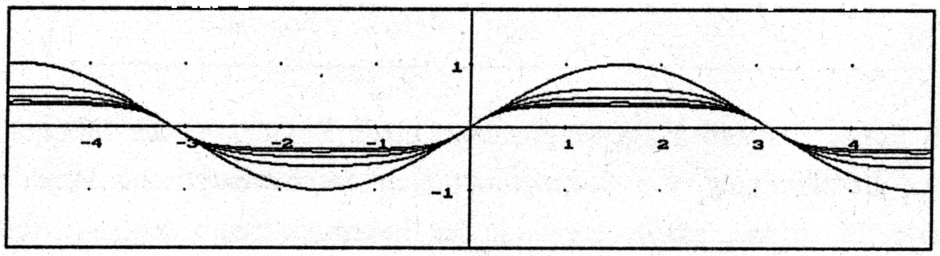


In diesem Zusammenhang wurde von verschiedenen Studenten immer wieder die Frage gestellt, ob f^2 eine Sinusfunktion sei. Dann müßte aber gelten: $f^2(x) = A \cdot \sin(x)$, mit einer noch zu bestimmenden Konstanten A. Nun ist die 1. Ableitung von f an der Stelle $x = 0$ gleich 1, daraus folgt aber $A = 1$. Also ist f^2 keine Sinusfunktion.

Obige Überlegungen lassen sich in analoger Weise für die gesamte Folge $(f^n)_N$ der iterierten Funktionen durchführen. Die folgende Darstellung zeigt die Graphen der ersten 10 Iterierten der Funktion f.



In der folgenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f, f^5, f^{10}, f^{15}, und f^{20} dargestellt.



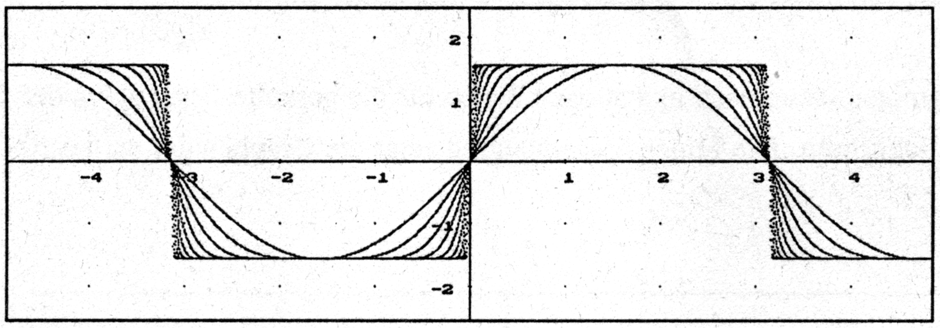
Die Graphen von f^n nähern sich somit für große n der x-Achse an.

Die Eigenschaften der Iterierten von f wurden im wesentlichen damit erklärt, daß der Graph von f auf]0,1] 'unterhalb' der Winkelhalbierenden verläuft. Deshalb läßt sich jetzt die Frage stellen, wie sich die Iterierten der Funktion $g(x) = A \cdot \sin x$ für $A > 1$ verhalten? Für den

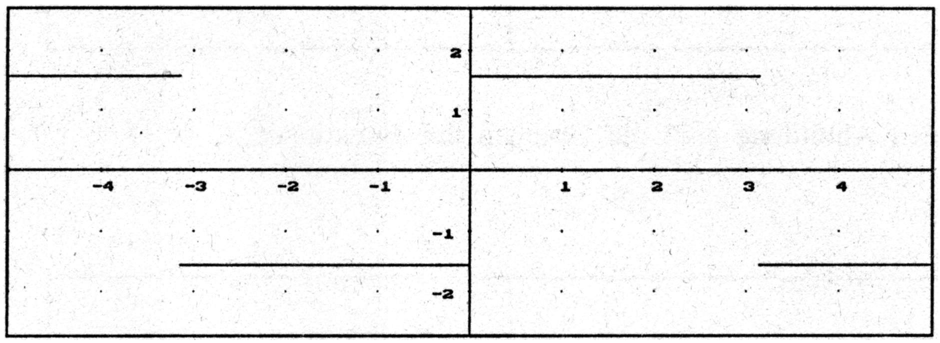
Definitionsbereich der Funktion g mit $g(x) = \frac{\pi}{2} \sin x$ gilt:

$$]-\infty,\infty[\xrightarrow{g} [-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}] \xrightarrow{g} [-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}] \xrightarrow{g}$$

Da der Graph von g auf $]0,\frac{\pi}{2}]$ 'oberhalb' der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten verläuft, zeigen die Graphen von g^n jetzt ein völlig anderes Verhalten als die obiger Funktionen f^n. Die folgende Darstellung gibt die ersten 10 Iterierten von g wieder.



Für f^{20} erhält man den folgenden Graphen:



Dieses Beispiel liefert zum einen die Möglichkeit, einen Einblick in die Möglichkeit der näherungsweisen Beschreibung von Sprungfunktionen durch analytische Funktionen zu erhalten. Derartige Funktionen spielen gerade in der Elektronik eine bedeutende Rolle. Zum zweiten ergibt sich aber auch die Notwendigkeit, die Grenzen der graphischen Darstellungsmöglichkeiten des Rechners zu problematisieren und etwa die Frage zu diskutieren, ob obige Funktion g^{20} an den auf dem Bildschirm erkennbaren 'Sprungstellen' differenzierbar ist. Zum dritten lassen sich jetzt auch die Terme der iterierten Sinusfunktion als Kettenbrüche darstellen und dadurch in Beziehung zu oben diskutierten Kettenbruchentwicklungen setzen.

$$\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\ (x)}{2}\right]}{2}$$

$$\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\ (x)}{2}\right]}{2}\right]}{2}$$

$$\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\left[\frac{\pi \ \mathrm{SIN}\ (x)}{2}\right]}{2}\right]}{2}\right]}{2}$$

5. Schluß

In der Sekundarstufe II können diese Überlegungen in den Rahmen eines computerunterstützten Unterrichts zum Themenkreis 'Kurvendiskussion' integriert werden. Dadurch eröffnet sich die Chance, daß die häufig auftretenden gleichlautenden Fragestellungen nach Nullstellen, Extrempunkten, Wendepunkten, ... durch herausfordernde Problemstellungen ersetzt oder zumindest ergänzt werden können. Bei der Beantwortung derartiger Fragen ist zwar der Rechner 'nur' ein heuristisches Hilfsmittel, er fordert aber in vielfältiger Weise mathematische Begründungen heraus. So bieten sich als weitere interessante Beispiele für die Untersuchung verketteter Funktionen etwa folgende Beispiele an: $f(x) = -0.2x^2 + 2$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = 0.5+\sin(x)$ oder $f(x) = 1.5 + \cos(x)$, $f(x) = e^{1-x}$, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ oder $f(x) = x + \sin(x)$. Der Leser sei hiermit zum eigenständigen Experimentieren und Entdecken aufgerufen.

Literatur:

BLANKENAGEL, J. (1985): Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik, Zürich

DÜRR, R., ZIEGENBALG, J. (1984): Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen, Paderborn

KLEMENT, H. (1976): Involutorische Funktionen in der Analysis, PM 18, 85 - 89

KRAUSE, F., REINERS-LOGOTHETIDOU, A. (1981): Kenntnisse und Fähigkeiten naturwissenschaftlich orientierter Studienanfänger in Physik und Mathematik, Bonn

NÄGERL, H., u. a. (1973): Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik, DdM 1, 143 - 157

REIMERS, B. (1980): Konstruktion endlicher Funktionengruppen mit gebrochen linearen Funktionen, MPhS 27, 104 - 137

WEIGAND, H.-G. (1989): Zum Verständnis von Iterationen im Mathematikunterricht, Bad Salzdetfurth

WEIGAND, H.-G. (1992): Ein computerunterstützter Zugang zum iterativen Lösen von Gleichungen, DdM 20, Heft 4, 298 - 318

WINTER, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Braunschweig, Wiesbaden

Adresse des Verfassers:

Prof. Dr. H.-G. Weigand
Universität Gießen
Institut für Didaktik der Mathematik
Karl-Glöckner-Str. 21 C
35394 Gießen
Tel. u. Fax. 0641/702-2570
Email: hans-georg.weigand@math.uni-giessen.de