BACK

Karl-Heinz Keunecke, Kiel

Differentialgleichungen im Physikunterricht ?

Vortragsmanuskript

Einleitung

Differentialgleichungen findet man in Physikbüchern der Sekundarstufe 2 häufig nur im Kleingedruckten oder als Anmerkung für besonders Interessierte. Dabei ist das Aufstellen und Lösen von Differentialgleichungen eine der wichtigsten Methoden der Physik. Es hat schon Gründe, daß diese Methode in der Schule kaum genutzt wird. Schüler sind bei einer Reihe von Problemen zwar in der Lage die zugehörige Differentialgleichungen aufzustellen, doch sie haben keine ausreichenden mathematischen Kenntnisse, um die Lösung zu bestimmen. Selbst bei einer Vorgabe der Lösung sind sie häufig nicht in der Lage, diese algebraisch zu handhaben und zu interpretieren. Mit der Einführung von Mathematikprogrammen in der Schule, die solche Lösungen zur Verfügung stellen und auch grafisch veranschaulichen, hat man nun aber zum ersten Mal die Chance, Differentialgleichungen häufiger im Physikunterricht zu behandeln.

Es ist nun die Frage: **Sollen Differentialgleichungen im Physikunterricht auch wirklich verwendet werden?**

Um einen Beitrag zu dieser Fragestellung zu leisten, möchte ich über eine Unterrichtseinheit aus dem Physikunterricht im 11. Jahrgang berichten. Ich habe darin bei der Behandlung harmonischer Schwingungen das Programm DERIVE zur Lösung der Differentialgleichungen und bei der Interpretation der Ergebnisse verwendet.

Behandelte Themen

Freie ungedämpfte Schwingungen:

- Verlauf der Schwingung y(t) bestimmen und grafisch darstellen
- Nachweisen, daß y(t) Lösung der Differentialgleichung ist
- Kreisfrequenz und Schwingungsdauer messen und berechnen
- Einfluß der Richtgröße D und Masse m auf die Schwingungsdauer untersuchen
- Energie der Schwingung bestimmen

Freie gedämpfte Schwingungen

- Verlauf der Schwingung y(t) bestimmen und grafisch darstellen
- Einfluß der Dämpfung auf den Schwingungsverlauf und die auf die Schwingungsdauer untersuchen
- Energie der Schwingung
- Phasendiagramme zeichnen lassen

Erzwungene Schwingungen

- Verlauf der erzwungenen Schwingung y(t) bestimmen und grafisch darstellen
- Einschwingvorgänge untersuchen
- Die Resonanzüberhöhung messen und die Resonanzkurve grafisch darstellen

DERIVE-Funktionen

Um gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung zu lösen, stellt DERIVE in der Utility-Datei ODE2.MTH u.a. die Funktionen

DSOLVE2(p, q, r, x, c_1, c_2)
DSOLVE2_BV(p, q, r, x, x_0, y_0, x_1, y_1)

DSOLVE2_IV(p, q, r, x, x_0, y_0, v_0)

zur Verfügung. Es sind hier die Funktionen notiert, die zur Lösung von Schwingungsproblemen von Bedeutung sind. (Allgemeine Lösung, Randwerte, Anfangswerte.)
Bei Anwendung dieser Funktionen erhält man im allgemeinen Exponentialfunktion mit einem komplexen Argumenten als Lösungen. Diese Terme können die Schüler des 11. Jaahrganges nicht verstehen, weil ihnen die mathematischen Grundlagen fehlen. In der Schule ist es daher erforderlich zumindestens die periodischen Lösungen durch die bekannten trigonometrischen Funktionen darzustellen. Dies läßt sich durch Einschränkung der Definitionsbereiche der Variablen erreichen. ((3)bis (7) in der folgenden Tabelle)
Es ist für Schüler sicher einfacher, wenn Sie nicht die DSOLVE2-Funktionen handhaben müssen, sondern Funktionen zur Verfügung gestellt bekommen, die vom Lehrer direkt auf das zu behandelnde Problem angepaßt sind.
Deshalb habe ich die DERIVE-Datei ODE2.MTH um folgende Funktionen und Definitionen ergänzt:

```
(1)  Y(t,d,m,a):=DSOLVE2_IV(0,d/m,0,t,0,a,0)
(2)  YA(t,d,m,β,a):=DSOLVE2_IV(β,d/m,0,t,0,a,0)
(3)  t: ε Real [0, inf)
(4)  m: ε Real (1/10, 1)
(5)  d: ε Real (1, 10)
(6)  a: ε Real (0, inf)
(7)  β: ε Real [0, 2)
(8)  YS(β,t):=DSOLVE2_IV(β,100,0,t,0,10,0)*STEP(t)
(9)  YE(β,k):=DSOLVE2_IV(β,100,SIN(10*k*t),t,0,0,0)
```

Diese Datei wird als Utility-Datei geladen, sodaß die Schüler diese und die anderen hier nicht gezeigten Funktionen der Datei nicht zu sehen bekommen. Für Schüler ist DERIVE mit seinen Funktionen eine Blackbox, von der sie nur Ein- und Ausgang interessiert und die sie als Werkzeug für ihre Untersuchungen einsetzen.

Umsetzung im Unterricht

In dieser Unterrichtseinheit habe ich nach einführenden Erklärungen den Schülern Aufgaben auf Arbeitsbögen gestellt, die sie dann jeder für sich vor dem Rechner lösten. Die Zusammenfassungen und Ergebnisse wurden gemeinsam besprochen und in die Folien handschriftlich eingetragen.

Ungedämpfte Schwingungen

Mit Folie 4 wird den Schülern zunächst angegeben, mit welcher DERIVE-Funktion die Lösung der Differentialgleichung für eine ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m} y = 0$$

erhalten werden kann.
Mit Aufgabe 1 bis 4 von Folie 5 sollten Schüler erkennen, daß mit der Lösung der Differentialgleichungen ein Experiment mathematisch vollständig beschrieben ist. Sie sollten ferner erkennen, daß mit dieser Methode Simulationen möglich sind. Solche Simulationen waren dann in den Aufgabe 6 gefordert.
Mit den Aufgaben von Folie 6 sollten die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung bestimmt und diskutiert werden.

Energieerhaltung

Bei meinen Vorbereitungen auf dieses Thema fand ich, daß die Energieerhaltung auf einfache Weise mathematisch und grafisch demonstriert werden kann. Die Schüler berechneten zunächst getrennt die kinetische Energie und die Spannergie der Feder und bestimmten dann die Gesamtenergie. Rechnung und grafische Darstellung sind aus Folie 8 ersichtlich. Das Schaubild zeigt eindrucksvoll, daß die Gesamtenergie wirklich zu jedem Zeitpunkt konstant ist.

Gedämpfte Schwingungen

Mit Folie 9 wird den Schülern die Berechnung der Lösung der Differentialgleichung für eine gedämpfte harmonische Schwingung

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \frac{D}{m} y = 0$$

mithilfe der vom Lehrer aufgestellten DERIVE-Funktionen erklärt. Neu ist hier die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit dem Dämpfungskoeffizienten β.
Die Schüler sollten mit den nächsten Aufgaben von Folie 10 zunächst über die grafischen Darstellungen mit dem Verlauf gedämpfter Schwingungen vertraut werden. Folie 11 zeigt mögliche Ergebnisse der Schülerarbeiten. (Schwingungen mit verschiedenen Dämpfungskoeffizienten β.) Es wird sichtbar, daß von einem bestimmten β an die Dämpfung zu stark ist und keine Schwingung mehr auftritt. Dies kann auch aus den notierten Termen abgelesen werden.
Mit den nächsten Aufgaben von Folie 12 sollen nun die allgemeinen Formeln für den Schwingungsverlauf, die Kreisfrequenz und die Schwingungsdauer hergeleitet werden. Auf dem Bildschirm erhalten die Schüler die folgende Lösung

$$a e^{-\frac{\beta}{2} t} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4D - \beta^2 m}{m}}\, t\right) + \beta \sqrt{\frac{m}{4D - \beta^2 m}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4d - \beta^2 m}{m}}\, t\right)\right)$$

Diesen Term zu verstehen, ist nicht ganz einfach, und die Schüler benötigen Hilfe. Mit Frage 1 sollen zunächst die Argumente der trigonometrischen Funktionen untersucht und interpretiert werden. Frage 2 soll helfen, den gesamten Lösungsterm zu verstehen.
An dieser Stelle bietet es sich an, wiederum die Energie des schwingenden Systems zu betrachten. Das Ergebnis ist in Folie 15 dargestellt.
Es ist an dieser Stelle auch möglich die Phasendiagramme der Schwingungen zeichnen zu lassen, (Folie 16) die in der technischen Schwingungslehre häufig genutzt werden.

Erzwungene Schwingungen

Auf Folie 17 sehen die Schüler die Differentialgleichung eines schwingungsfähigen Systems, auf das eine äußere Kraft f(t), wirkt. Da hier nur das Resonanzverhalten untersucht werden soll, habe ich die spezielle Funktion $f(t) = \sin(k\omega_0 t)$ vorgegeben. ω_0 stellt darin die Resonanzfrequenz des Systems dar und k>0 gibt die Abweichung davon an. Als Anfangswerte werden y(0)=0 und y'(0)=0 vorgegeben.
Die Betrachtung der algebraischen Lösungen ist für Schüler wenig ergiebig, so daß sie direkt zu den grafischen Darstellungen (Folie 19) übergehen sollten. Als Beispiel sind dort erzwungene Schwingungen für 3 verschiedene Anregungsfrequenzen (k=0.8; 1; 1.2) gezeichnet worden.
Die Auswertungen dieser und weiterer grafischer Darstellungen führen zu folgenden Ergebnissen:
1. Nach einer Einschwingphase schwingt das System mit der Frequenz der Anregung.

2. Die Dauer des Einschwingvorganges ist umso größer, je kleiner die Dämpfung ist.
3. Die Amplitude der Schwingung hängt von $|\omega-\omega_0|$ ab.

Weitere Auswertungen (Folie 18) erlauben nach Messung der Amplituden der Schwingungen, die Resonanzkurve (Folie 20) zu zeichnen.

Zusammenfassung

Am Beispiel der Schwingungsgleichung ist versucht worden zu zeigen, daß es durch den Einsatz des Programms DERIVE im Physikunterricht in der Oberstufe möglich ist, Differentialgleichungen zu behandeln, ohne die Schüler zu überfordern. Sie werden nicht mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen belastet, sondern der Lehrer kann, wie gezeigt, für jede Unterrichtseinheit Funktionen definieren, die dann Lösungen für spezielle Aufgabenstellungen liefern. Die Aufgabe der Schüler besteht darin, durch Wahl der Parameter Zusammenhänge und Abhängigkeiten herauszufinden. Es ist häufig weder erforderlich noch sinnvoll den Lösungsterm algebraisch zu interpretieren. Die Ergebnisse können in vielen Fällen direkt aus den grafischen Darstellung abgelesen werden. Die Schüler lernen dadurch außerdem die Bedeutung von Diffentialgleichungen in der Physik kennen und erfahren, daß mit deren Lösung die Bewegung des betrachteten Schwingers vollständig beschrieben ist.
Mit dem Einsatz von DERIVE sollen keineswegs fertige Lösungen geliefert, sondern nur Werkzeuge bereitgestellt werden, mit denen die Schüler eigene Untersuchungen durchführen können.
Im Bereich der Hochschulen und Universitäten werden Computer Algebra Systeme (CAS) wie DERIVE immer häufiger in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern in der Ausbildung eingesetzt. Auch in der Schule gibt es sicherlich sinnvolle Anwendungsmöglichkeiten. Differentialgleichungen im Physikunterricht ist meiner Meinung nach eine solche.
Die von mir vorgestellten Anwendungen im Bereich der mechanischen Schwingungen sind sehr unvollständig. Die Überlegungen müßten auf weitere Beispiele, insbesondere auf nichtlineare Schwingungen ausgedehnt werden. Derartige Schwingungen könnten dann wirklich nur mit Programmen wie DERIVE, MAPLE oder MATHEMATICA behandelt werden. Das würde meines Erachtens, um noch einmal auf das Fragezeichen im Titel meines Vortrages zurück zu kommen, noch wesentlich besser den Wert von CAS im Physikunterricht demonstrieren. Nehmen Sie also meine Untersuchungen als einen Anfang.

Freie, ungedämpfte Schwingungen

Die Differentialgleichung einer ungedämpften, freien Schwingung lautet

$$\ddot{y} = -\frac{D}{m}y$$

Hierin ist **y** die zeitabhängige Auslenkung, **m** die Masse und **D** die Richtgröße (z.B. die Federhärte) des schwingungsfähigen Systems.

Die Lösung dieser Differentialgleichung erhält man durch die DERIVE-Funktion

$$y(t,d,m,a)$$

t: Zeit in s;
d: Federhärte in N/m;
m: Masse in kg,
a: Auslenkung in cm oder m zur Zeit t=0.

Folie 4

Aufgaben (Ungedämpfte Schwingungen 1)

1) Bestimmen Sie von einer schwingenden Feder Masse, Federhärte, Schwingungsdauer und Auslenkung zur Zeit t=0,.

m= 0,5 kg   D= 22,3 $\frac{N}{m}$ T= 0,91 s   a= 10 cm

2) Rufen Sie die Funktion $y(t,d,m,a)$ mit den gemessenen Werten für m, d und a auf und notieren Sie die Lösung.

$$y(t)= 10\cos\left(\frac{\sqrt{1115}}{5}t\right)$$

3) Stellen Sie die Lösung grafisch dar. Messen Sie die Schwingungsdauer!

T= 0,94 s

Vergleichen Sie Experiment und Rechnung.

4) Berechnen Sie die Auslenkung der Feder zu den Zeiten 0.1s; 0.2s ... 1s.

0,1 : 7,85 cm   0,3 : −4,14 cm   0,5 : −9,08 cm   0,9 : 9,63 cm
0,2 : 2,33 cm   0,4 : −8,914 cm   0,6 : −6,48 cm   1,0 : 4,23 cm

5) Untersuchen Sie was durch den Parameter a bestimmt wird?

Amplitude der Schwingung

6) Untersuchen Sie,wie die Lösung der Differentialgleichung und die Schwingungsdauer von der Federhärte D und von der Masse m abhängt.

D in N/m	y(t)	T in s
1	$10\cos(\sqrt{10}\,t)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{10}}$
2	$10\cos(2\sqrt{5}\,t)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{20}}$
4	$10\cos(2\sqrt{10}\,t)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{40}}$
8	$10\cos(4\sqrt{5}\,t)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{80}}$

m in kg	y(t)	T in s
0,1	$10\cos(\sqrt{10}\,t)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{10}}$
0,2	$10\cos(\sqrt{5}\,t)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$
0,3	$10\cos(\frac{\sqrt{10}}{2}\,t)$	$2\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}$
0,4	$10\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}\,t)$	$2\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

Formulieren Sie Ihr Ergebnis:

$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$ $T \sim \sqrt{m}$

Folie 5

Folie 7

Aufgaben (Ungedämpfte Schwingungen 2)

1) Rufen Sie $y(t,d,m,a)$ auf und notieren Sie die Lösung

$$y(t) = a \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{d} \cdot t}{\sqrt{m}} \right)$$

Weisen Sie nach, daß y(t) eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = -\frac{D}{m} y$$

ist. Berechnen Sie dazu $\ddot{y}$ und $-\frac{D}{m}y$ und vergleichen Sie die Terme.

2) Berechnen Sie aus dem Argument der trigonometrischen Funktion von y(t) die Kreisfrequen und die Schwingungsdauer T der Schwingung.

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ T= $2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

Rechnung:

#24: $0.5 \cdot a^2 \cdot d$

#25: $\frac{10}{2} \cdot Y(t, 10, 0.1, 10)^2 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot \left[\left[\frac{d}{dt}\right]^1 Y(t, 10, 0.1, 10)\right]^2$

#26: 500

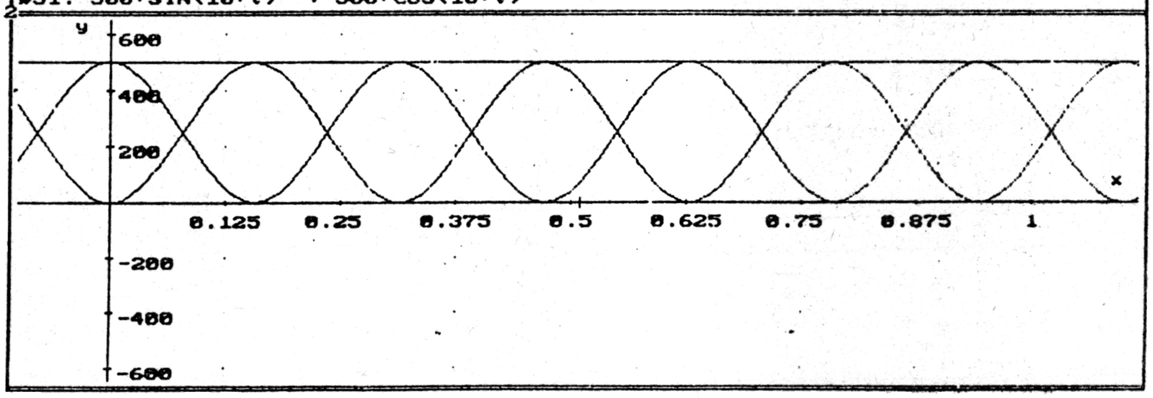
#27: $\frac{10}{2} \cdot Y(t, 10, 0.1, 10)^2$

#28: $0.5 \cdot 0.1 \cdot \left[\left[\frac{d}{dt}\right]^1 Y(t, 10, 0.1, 10)\right]^2$

#29: $500 \cdot SIN(10 \cdot t)^2$

#30: $500 \cdot COS(10 \cdot t)^2$

#31: $500 \cdot SIN(10 \cdot t)^2 + 500 \cdot COS(10 \cdot t)^2$



Folie 8

Gedämpfte Schwingungen

Die Differentialgleichung einer Schwingung mit einer geschwindigkeits-proportionalen Dämpfung lautet

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \frac{D}{m} y = 0.$$

Hierin ist **y** die zeitabhängige Auslenkung, **m** die Masse, **D** die Richtgröße (z.B. die Federhärte) und β der Dämpfungskoeffizient des schwingungsfähigen Systems.

Die Lösung dieser Differentialgleichung erhält man durch die DERIVE-Funktion

$$ya(t,d,m,\beta,a).$$

t: Zeit in s;
d: Federhärte in N/m;
m: Masse in kg,
β: Dämpfungskoeffizient in 1/s
a: Auslenkung in cm oder m zur Zeit t=0.

Für das Beispiel D=10N/m, m=0.1kg, a=10cm kann zur Vereinfachung die DERIVE-Funktion

$$ys(\beta,t):=y(t,10,0.1,\beta,10)$$

gewählt werden.

Folie 9

Aufgaben (Gedämpfte Schwingungen 1)

1) Bestimmen Sie die Lösung $y_u(t)$ der Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung für die Parameter

D=10N/m, m=0.1kg, a=10cm.

Bestimmen Sie anschließend die Lösung $y_d(t)$ der Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung für die Parameter

D=10N/m, m=0.1kg, a=10cm und ß=2s^{-1}.

Notieren Sie die Lösungen.

$y_u(t)= 10 \cos(10t)$

$y_d(t)= 10\, e^{-t}(\cos(9{,}95t) + 1\cdot \sin(9{,}95t))$

Stellen Sie die Terme grafisch dar. (Linke Grenze 0.)

2) Bestimmen Sie die Lösungen für β = 1, 2, 4, 8, 16 s^{-1}.

$y(t,1)= e^{-0{,}5t}(10\cos 9{,}99t + 0{,}5 \sin 9{,}99t)$

$y(t,2)= e^{-t}(10\cos 9{,}95t + 1 \sin 9{,}95t)$

$y(t,4)= e^{-2t}(10\cos 9{,}8t + 2 \sin 9{,}8t)$

$y(t,8)= e^{-4t}(10\cos 9{,}2t + 4{,}4 \sin 9{,}2t)$

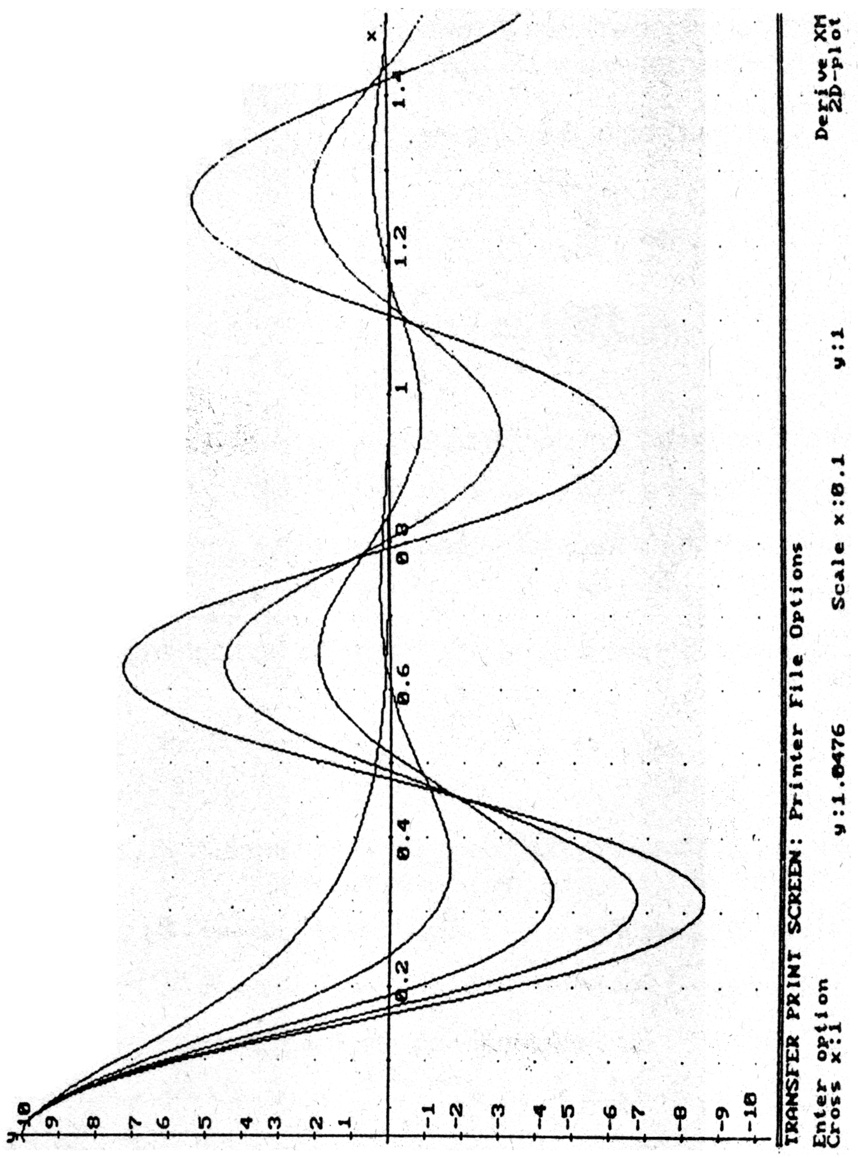
$y(t,16)= e^{-8t}(10\cos 6t + 13{,}3 \sin 6t)$

$y(t,32)= 11{,}4\, e^{-3{,}5t} - 1{,}4\cdot e^{-28{,}5t}$

Welcher Term bestimmt die Dämpfung ? Welchen Einfluß hat der Dämpfungskoeffizient β ?

Stellen Sie die Funktionsterme grafisch dar. (Linke Grenze 0.)
Beschreiben Sie den Einfluß der Dämpfung.

Folie 10


TRANSFER PRINT SCREEN: Printer File Options
Enter option
Cross x:1 y:1.0476
Scale x:0.1 y:1
Derive XM
2D-plot

Folie 11

Aufgaben (Gedämpfte Schwingungen 2)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung für die Parameter D, m, β und a mit Hilfe der DERIVE-Funktion $ya(t,d,m,\beta,a)$.

1. Notieren Sie die Argumente der trigonometrischen Funktionen einer gedämpften und einer ungedämpften Schwingung in der Tabelle. Betimmen Sie die Kreisfrequenzen ω und die Schwingungsdauern T.

ungedämpfte Schwingung	gedämpfte Schwingung
$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega = \sqrt{\frac{4D - \beta^2 m}{4m}}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{4D - \beta^2 m}}$

Welchen Einfluß hat der Dämpfungskoeffizient β auf ω und T ?

ω nimmt mit wachsender Dämpfung ab, T wird größer

Unter welchen Voraussetzungen sind ω bzw. T nur definiert ?

$4D > \beta^2 m$ $\quad\quad$ $\beta < 2\sqrt{\frac{D}{m}}$

2. Notieren Sie die Lösung y(t), indem Sie ω in den trigonometrischen Funktionen verwenden.

$$y(t) = a\, e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(\cos\omega t + \frac{\beta}{2\omega}\sin\omega t\right)$$

Um das Zusammenwirken der einzelnen Terme in y(t) zu erkennen, untersuchen Sie

a) cos t + k sin t für verschiedene k,

Der Term k sin t bewirkt nur eine Verschiebung der Kosinusfunktion. $\cos t + k \sin t = \cos(t + \varphi)$?

b) $e^{-\frac{\beta}{2}t}$ für verschiedene β. (s. Aufgaben gedämpfte Schwingungen 1)

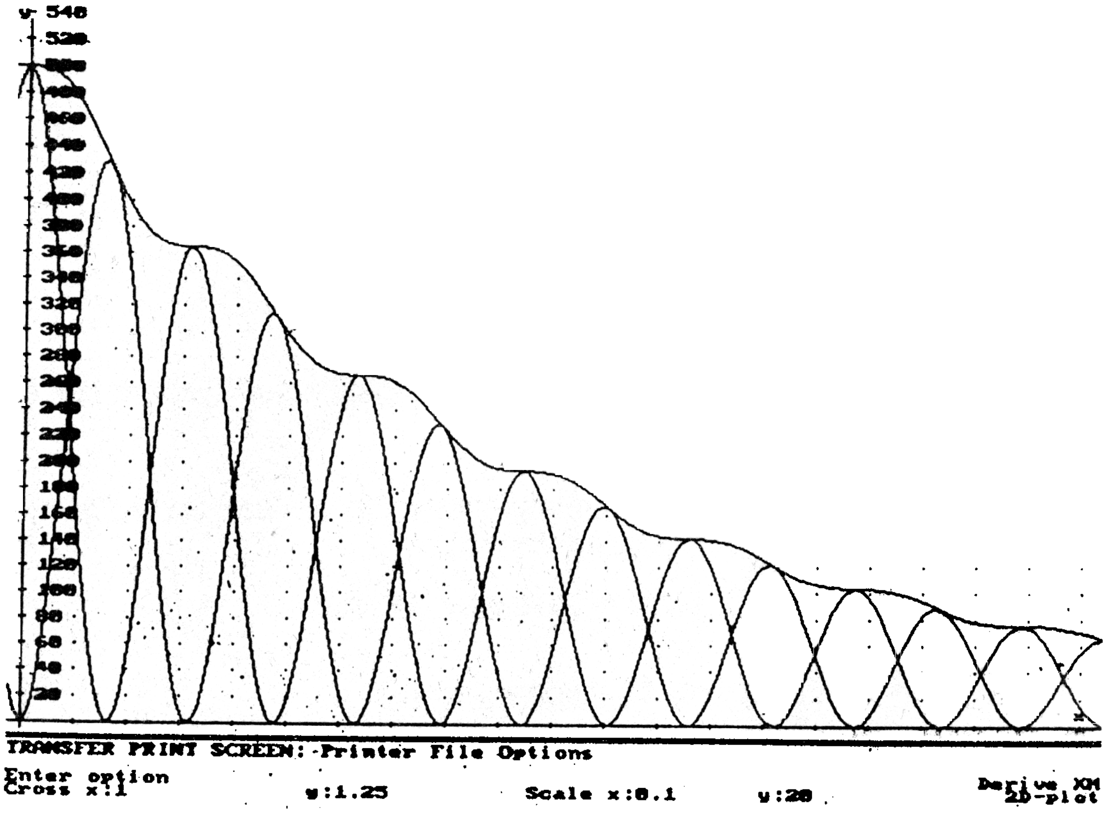
$e = 2{,}71828$. $e^{-\frac{\beta}{2}t}$ ist eine fallende Exponentialfunktion. Je größer β ist, desto stärker ist der Abfall

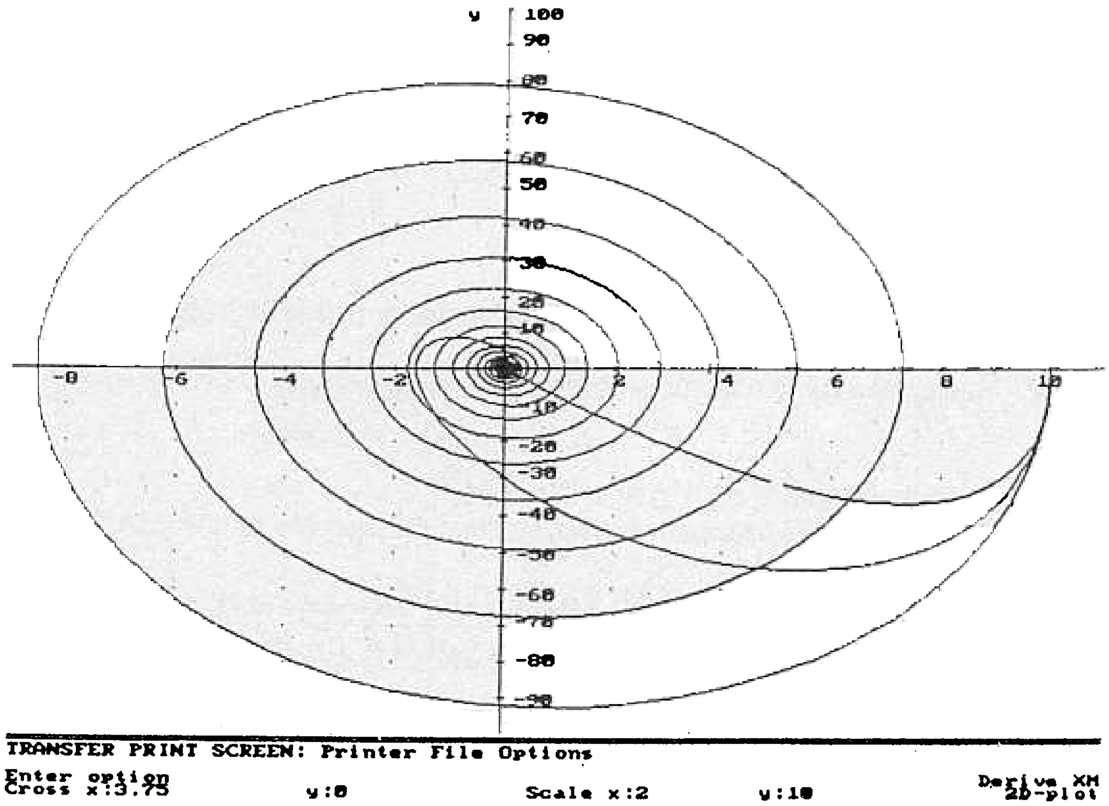
Erklären Sie den Einfluß der einzelnen Terme in y(t).

Ergebnisse: $a\,e^{-\frac{\beta}{2}t}$ ist die zeitabhängige Amplitude der Schwingung.
$\cos \omega t - \frac{\beta}{2\omega}\sin\omega t$ stellt eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω dar

Folie 12

Folie 15





Folie 16

Folie 17

Erzwungene Schwingungen

Die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \frac{D}{m} y = f(t)$$

beschreibt die Reaktion ein schwingungsfähigen Systems auf einer äußere Anregung f(t).

Die Lösung dieser Differentialgleichung für das Beispiel D=10N/m, m=0.1kg, a=10cm und eine Anregung der Form

$$f(t) = a \sin(k\omega_0 t) \quad mit \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m}{D}},$$

erhält man durch die DERIVE-Funktion

$$ye(\beta, k)$$

Darin ist β der frei wählbare Dämpfungskoeffizient, ω_0 die Kreisfrequenz der freien Schwingung und k eine natürliche Zahl, die die Frequenz der sinoidalen Anregung f(t) bestimmt.

Aufgaben (Erzwungene Schwingungen)

Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \frac{D}{m} y = a \sin(k\omega_0 t)$$

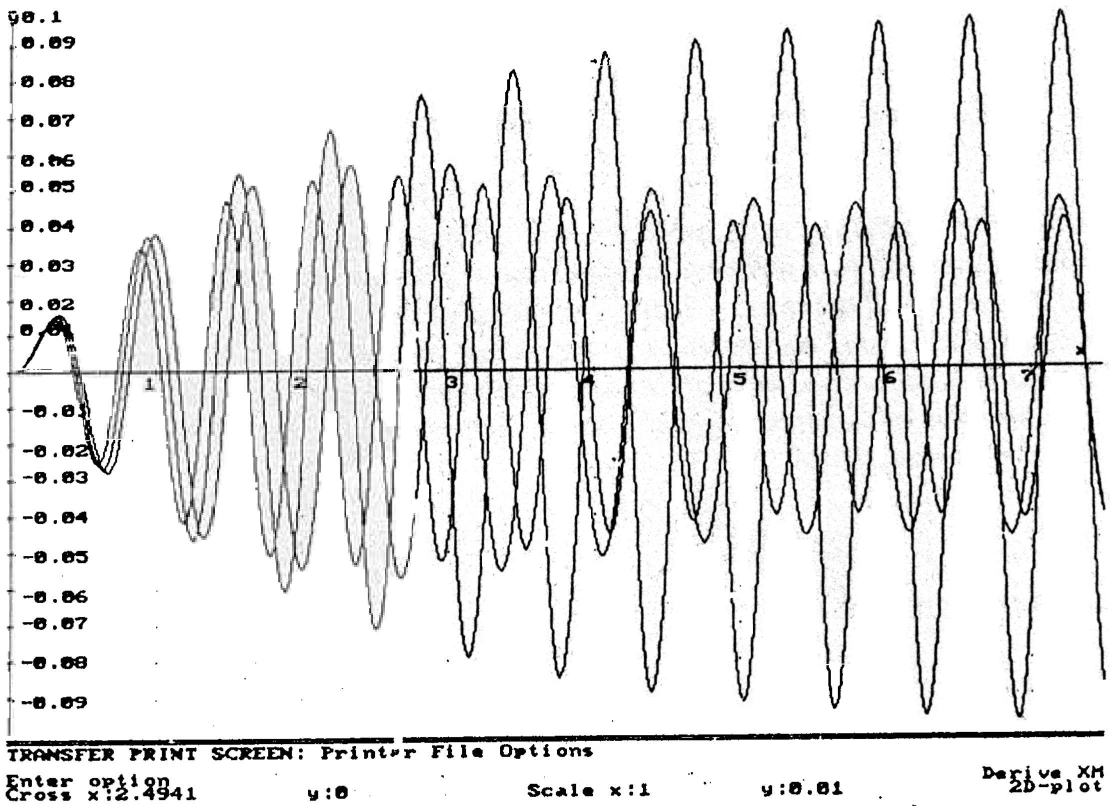
für β=2 und k=0.5; 0.75; 0.9; 1; 1.1; 1.25; 1.5.
Stellen Sie die Lösungen grafisch dar und messen Sie Amplituden.

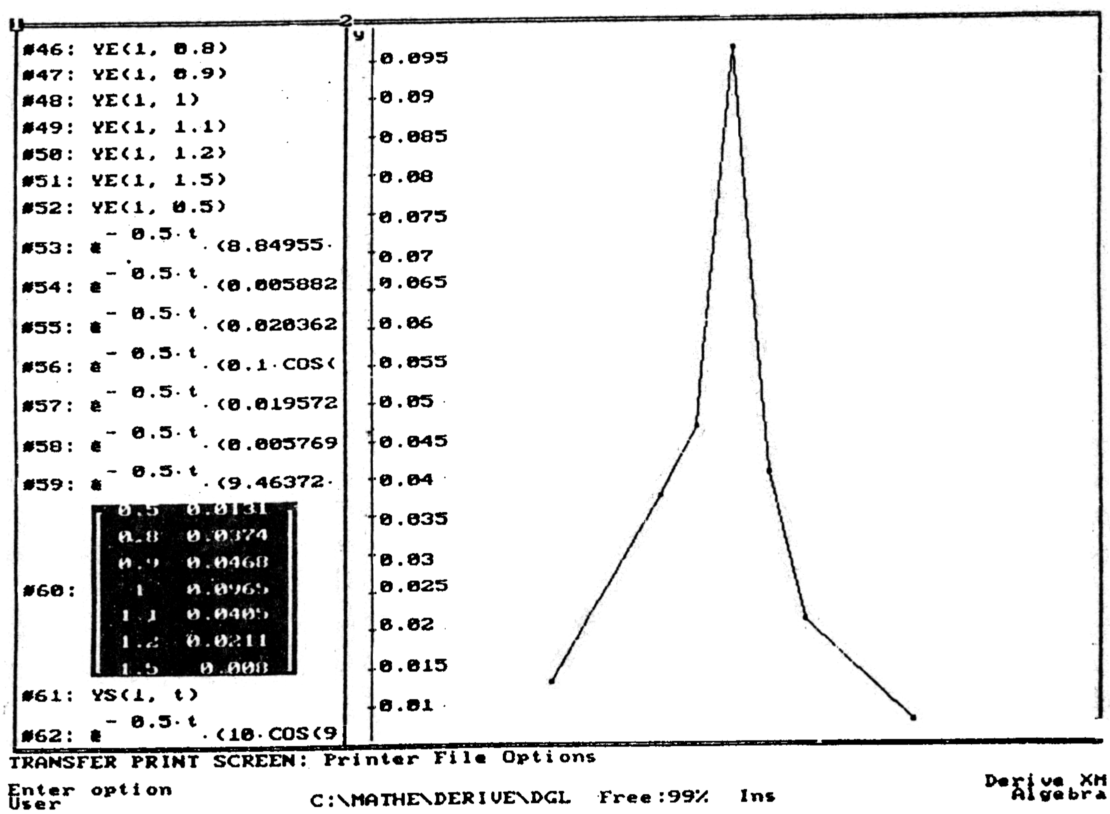
Frequenz in Hz	$0{,}5\omega_0$	$0{,}8\omega_0$	$0{,}9\omega_0$	ω_0	$1{,}1\omega_0$	$1{,}2\omega_0$	$1{,}5\omega_0$
Ampltude in cm	0,013	0,037	0,0465	0,0965	0,0405	0,0211	0,008

Stellen Sie die Wertetabelle grafisch dar.

Folie 18

Folie 19





Folie 20