BACK

Untersuchung von Abbildungen durch Matrizen mit DERIVE

Christoph Slaby

Das Thema Matrizen ist in vielen Lehrplänen für das Grund- und Leistungsfach Mathematik im Themenkreis Lineare Algebra/Analytische Geometrie eines der Schwerpunktthemen.

Matrizen sind universelles Werkzeug der Linearen Algebra. Wird ein Gleichungssystem mit Hilfe der Koeffizientenmatrix A notiert, kann die Matrix A so interpretiert werden, daß sie eine Abbildung beschreibt, die jedem $\vec{x} \in R^n$ genau ein $A \bullet \vec{x} \in R^m$ zuordnet. Dieser Abbildungseffekt läßt sich mit geeigneten einfachen Abbildungen der Ebene ohne großen Aufwand verdeutlichen.

Für den Unterricht ist die Berechnung der Bilder zu einzelnen Punkten und Figuren sowie die geometrische Veranschaulichung der linearen bzw. affinen Abbildungen von herausragender Bedeutung.
Angestrebt wird ein Wechsel zwischen dem Rechnen mit Matrizen und der geometrischen Interpretation. Dafür erscheint ein Computer-Algebra-System wie Derive, das gleichzeitig eine Algebraseite und eine Graphikseite zur Verfügung stellt, hervorragend geeignet.

Im Arbeitsblatt 1 wird die geometrische Veranschaulichung der durch eine Matrix gegebenen Abbildung erarbeitet. Dabei wird die Matrix M nicht nur auf einzelne Punkte angewandt, sondern auch auf ganze Figuren, wie Parabel, Kreis oder Karo. Diese Figuren können auch zu einer komplexen Gesamtfigur (org) zusammengefaßt werden, die dann durch die Matrix abgebildet wird. Bei entsprechender Einstellung der Farboptionen erhalten Original- und jeweils zugehörige Bildfigur die gleiche Farbe.
Um den Unterricht von Tipp- oder Programmierarbeit zu entlasten werden die benutzten Figuren und einige nützliche Befehle in einer Hilfsdatei "util.mth" vordefiniert. Diese Hilfsdatei ist als Utility beim Start mitzuladen.

Im Arbeitsblatt 2 soll die Suche von Eigenwerten und Eigenvektoren graphisch vorbereitet und veranschaulicht werden. Grundlage dafür sind Figuren, die aus einzelnen Punkten bestehen. Vordefiniert ist z.B. ein Quadrat (qua) aus vierzig Punkten oder eine Kreis mit 30 Punkten.. Mit etwas "Trickserei", deren Hintergründe für die Mathematik uninteressant sind, die aber im Arbeitsblatt genau beschrieben wird, können die Punkte mit verschiedenen Farben gezeichnet werden. Bei Benutzung der angegebenen Color-Options-Einstellungen werden die jeweiligen Bildpunkte in der gleichen Farbe gezeichnet.
Die graphische Suche eines Eigenwertes läuft nun auf die Untersuchung der Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten hinaus. Läuft die Verbindungsgerade von Original- und Bildpunkt durch den Koordinatenursprung, so hat man einen Eigenvektor gefunden. Der zugehörige Eigenwert berechnet sich dann als der "Streckfaktor" mit dem der Originalpunkt auf den Bildpunkt abgebildet wird.
In der Regel wird man nicht sofort eine Ursprungsgerade finden. Hier muß nun weiter experimentiert werden. die Punkte 10 und 11 des zweiten Arbeitsblattes geben hierzu Anleitungen.

Arbeitsblatt 1

Abbildungen durch (2-2)-Matrizen

Quadratische 2-2-Matrizen induzieren eine Abbildung der Ebene in sich. Durch die Matrix-Vektor-Multiplikation wird jedem Punkt der Ebene ein Punkt der Ebene zugeordnet:

$$\vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$$

Die "Geometrie" derartiger Abbildungen soll an ausgewählten Beispielen untersucht werden

1 Eingabe der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ in Derive ist auf verschiedene Arten möglich:

a) Eingabe in der A(uthor)-Zeile über **M := [[1,1],[0,2]]**
(Matrizen sind Vektoren von Vektoren gleicher Dimension. Die Eingabe erfolgt immer zeilenweise)

b) Eingabe über den Befehl **D**(eclare)-**M**(atrix); Angabe der Spalten- und Zeilenanzahl. Im nächsten Befehl wird dieser Matrix dann ein Name zugewiesen

2. Anwendung der Matrix auf einzelne Punkte z.B.: **M . [1,2]**
S(implify) bringt das Ergebnis
Markieren des Originalpunktes [1,2] mit den Pfeiltasten und **P**(lot)-**O**(verlay)-**P**(lot), um den Punkt zu zeichnen. Zurück in das **A**(lgebra) - Fenster.
Markieren des Bildpunktes [3,4] und erneut **P**(lot) - **P**(lot), um diesen Punkt zu zeichnen.
Original- und Bildpunkte können in vorgeschriebenen Farben gezeichnet werden. Hierzu ist im Graphik-Menü die Voreinstellung mit **O**(ptions)-**C**(olor)-**P**(lot) - Next Plot: xx möglich.
So können z.B.: alle Originalpunkte grün (Farbnummer 10) und alle Bildpunkte rot (Farbnummer 12) gezeichnet werden.
Empfehlenswert ist auch eine Einstellung, in der Original- und Bildpunkt jeweils in der gleichen Farbe gezeichnet werden.

Erstellen Sie auf diese Weise eine "Wertetabelle" für die durch die Matrix M induzierte Abbildung und zeichnen Sie die zugehörigen Original- und Bildpunkte.

3. Anwenden der Abbildung auf vordefinierte Punktmengen.
pm ist eine vordefinierte Menge von Punkten. Laden mit **T**(ransfer) - **U**(tility) - **util.mth**
P(lot)-**P**(lot) zeichnet die Menge der fünf Punkte in einer Farbe.
(Mit der Voreinstellung O(ptions)-S(tate)-Connected könnten die einzelnen Punkte verbunden werden, was aber mathematisch erst statthaft ist, wenn die Geradentreue nachgewiesen wurde)

Bild(m,pm) erzeugt die zugehörige Bildmenge.
S(implify) und **P**(lot) - **P**(lot) stellt die Bildmenge dar.
(pm kann als Menge von Vektoren nicht durch die Operation m.pm abgebildet werden. Der vordefinierte Befehl Bild(matrix, Punktmenge) berechnet das Bild elementweise)

4. Kettenbildung: Die Abbildung wird auf einen Punkt angewandt, dann erneut auf den Bildpunkt, dann auf den Bildpunkt des Bildpunktes, usw.

   Mit dem Befehl kette(matrix,punkt) wird eine fünfache Iteration erzeugt.

   Kette(m,p2) S(implify) und **P**(lot) - **P**(lot)

5. Die Matrix wird auf einfache Figuren in der Ebene angewandt.
   Verschiedene Figuren sind in der Hilfsdatei Util.mth (oder in der Datei figuren.mth) vordefiniert.

   Eingabe: **par** (für quadratische Normalparabel) und P(lot)-P(lot), um die Parabel zu zeichnen. (In der Regel reicht die von Derive vorgeschlagene Voreinstellung für den Parameter t von -3,14 bis +3,14 aus.) Zurück in das A(lgebra) -Fenster.

   Berechnung des Bildes: **m . par** und S(implify) und **P**(lot) - **P**(lot)
   (Für die Farbwahl ist wieder die Voreinstellung über **O**(ption) - **C**(olor) - **P**(lot) - Next notwendig.)

   Zeichnen Sie die Figuren aus der Hilfsdatei figuren.mth mit ihren zugehörigen Bildern.
   (Zwischendurch "Säubern" der Graphikseite mit **D**(elete)-**A**(ll), um den Überblick zu bewahren.)

6. Die Matrix wird auf eine zusammengesetzte Figur mit dem Namen org angewandt.
   Eingabe von : **org**
   S(implify) und **P**(lot) - **P**(lot) mit Start bei Farbnummer 15
   BILD(m,org)
   S(implify) und **P**(lot) - **P**(lot) mit erneutem Farbwahlstart bei Nr. 15
   bewirkt, daß Original- und Bildfigur in gleicher Farbe gezeichnet werden.

   Untersuchen sie entsprechend die vordefinierte Figur **org2**.

7. Zusammenfassung:
   Welche geometrischen Eigenschaften lassen sich vermuten?
   Wie verändern sich Länge, Winkel, Form, Flächeninhalt?
   Enthält die Abbildung einen Verschiebungsanteil, einen Spiegelungsanteil?
   Werden die Figuren getreckt, verzerrt, geschert oder verschoben?

   Wie könnte man geometrisch die Abbildung beschreiben?
   Gelingt es, eine Konstruktionsvorschrift (mit Zirkel und Lineal) anzugeben, um zu einem beliebigen Punkt, den zugehörigen Bildpunkt zu konstruieren?

8. Untersuchen Sie die durch die folgenden Matrizen induzierten Abbildungen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 & -2 \\ 2 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Weitere vordefinierte Matrizen befinden sich in der Datei util.mth unter den Namen M1 bis M6.

mdemo1.dmo

```
"Untersuchung einer Matrix M"
m:=[[1,1],[0,2]]
"---------------------------------------------"
"Anwendung auf einzelne Punkte"
[[1,1],[0,2]] . [1,2]
"---------------------------------------------
"Anwendung auf eine Punktmenge pm (vordefiniert)"
pm
"plot mit Scale x=2 und y=2"
BILD(m,pm)
"-----------------------------------------
"nicht im Arbeitsblatt1"
"Zeichnen der Originalpunkte und der Bildpunkte in verschiedenen Farben"
"Voreinstellung: O(ptions)-C(olor)-P(lot)-N(ext):15 , bedeutet Start mit weia"
COLOR(pm)
"P(lot) mit Einstellung O-C-P-Next:15"
COLOR(BILD(m,pm))
"-----------------------------------------     "
"Kettenbildung"
KETTE(m,p2)
KETTE(m,p3)
"---------------------------------------------
"Anwendung der Matrix auf Figuren"
par
m . par
kar
m . kar
"-----------------------------------------
"nicht im Arbeitsblatt1"
"Kettenbildung mit Figuren"
KETTE(m,par)
"---------------------------------------------"
"Anwendung auf eine komplexe Originalfigur"
org
"Benutzung von Bild(matrix,figur)"
"Plot mit Voreinstellung N(ext):15 beginnen"
BILD(m,org)
"---------------------------------------------"
".          ----------E-N-D-E-----------------------"
```

Anlage 1

Funktionen und Figuren der Datei Util.mth

Vor den Untersuchungen und Berechnungen der Eigenschaften von Matrizen ist die Datei util.mth über T(ransfer) - L(oad) - U(tility) zu laden. Die Zeilen werden nicht angezeigt, die Befehle stehen aber wie implementierte Befehle zur Verfügung.

Funktionen:

1. **KETTE(matrix, startpunkt)**
   berechnet zu einem Startpunkt P das Bild von P, das Bild des Bildes, usw. Die Iteration wird insgesamt fünfmal durchgeführt.
2. **BILD(matrix, punktmenge)**
   bildet eine Menge einzelner Punkte elementweise durch die Matrix ab.
   Dieser Befehl wird nur benötigt, wenn eine Menge von Vektoren gegeben ist. Kurven in Paramterform werden wie einzelne Vektoren abgebildet.
3. **COLOR(punktmenge)**
   bereitet eine Punktmenge auf die Zeichnung in verschiedenen Farben vor. Punktmengen werden normalerweise in einer Farbe geplottet. Die Menge COLOR(x) wird bei der Einstellung O(ptions) - C(olor) - A(uto) -Yes im Graphikfenster in verschiedenen Farben geplottet.
4. **PUNKTFIGUR(figur)**
   wandelt eine in Paramterform gegebene Kurve in eine Figur aus 30 einzelnen Punkten um. auf die Menge PUNKTFIGUR(x) können dann die Befehle BILD und COLOR angewandt werden.

Figuren:

Einfache Figuren in Parameterdarstellung

Beim Zeichnen muß der Bereich für den Parameter t gewählt werden. Voreinstellung von Derive ist $-\pi \leq t \leq \pi$. Beim Plotten mehrerer Figuren in Parameterdarstellung kann mit Strg-Enter für alle Figuren der gleiche Parameterbereich ausgewählt werden.

1. **ge1** Ursprungsgerade mit y= -0,5x
2. **ge2** Gerade mit y= 2x-1
3. **ge3** Gerade mit y= -0,5x+2
4. **hkr** Halbkreis mit dem Radius r=2
5. **par** Normalparabel in Ursprungslage
6. **lis** Lissajous Figur (1-2)
7. **kar** Skatkarten-Karo
8. **spi** Spirale
9. **vkar** verschobenes Karo
10. **kre** Kreis mit r=1
11. **vkar** verschobenes Skatkarten Karo

Zusammengesetzte Figuren

Mehrere der einfachen Figuren können zu einer komplexen Gesamtfigur zusammengesetzt werden. Je nach Voreinstellung wird eine zusammengestzte Figur einfarbig oder mehrfarbig geplottet.

Abgebildet wird eine zusammengesetzte Figur durch den Befehl BILD(matix, punktmenge)

1. **org** Figur aus einer Geraden, einem Halbkreis, einem Karo und einer Parabel
2. **org2** Figur aus einer Geraden, einer Lissajous-Figur, einem verschobenen Kreis und einer Spirale

Punkte

Folgende Punkte (oder Vektoren) sind vordefiniert:

1. **o** = [0,0] (Buchstabe klein o)
2. **e1** = [1,0] und **e2** = [0,1]
3. **p1** = [1,1] ; **p2** = [1,2]; **p3** = [2,5]; **p4** = [5,3]; **p5** = [-5,-2]
4. **v** = [x1, x2] als Punktvariable. Daher sollte die Voreinstellung "O(ptions) - I(nput) - Mode: Word" gewählt werden.

Punktmengen:

pm = [p1, p2, p3, p4, p5]
qua ist ein Quadrat aus 40 einzelnen Punkten
kreis ist ein Vollkreis aus 30 einzelnen Punkten

Die Bilder zu einer Punktmenge werden mit dem Befehl BILD(matrix,menge) berechnet.

Die Punktmengen können durch Aufbereitung mit dem Befehl COLOR(menge) auch mit verschiedenen Farben gezeichnet werden.

Matrizen:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad m1 = \begin{pmatrix} 3{,}4 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 4{,}1 \end{pmatrix}; \quad m2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad m3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad m5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad m6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 2

Graphische Suche von Eigenwerten und Eigenvektoren

1. Laden der Datei **util.mth** mit T(ransfer)-L(oad)-U(tility) **util.mth**

2. Eingabe der zu untersuchenden Matrix: **m:=[[1,1],[0,2]]**

3. Vordefiniert ist ein Quadrat, bestehend aus 40 Punkten.
   Die Figur kann mit dem Befehl **qua** aufgerufen und gezeichnet werden.

4. Entsprechend kann das Bild des Quadrates durch **Bild(m,qua)** gezeichnet werden.

5. Um die Abbildung punktweise verfolgen zu können, werden die einzelnen Punkte verschiedenfarbig gezeichnet. Zur Aufbereitung dient der Befehl **color(punktfigur)**.
   Die Einstellungen für die Graphikseite werden vor jedem Zeichnen mit **O**(ptions)-**C**(olor)-**A**(uto)-**Yes** (Standard) und **O**(ptions)-**C**(olor)-**P**(lot)-next plot: **15** gewählt.

   Welche Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkt gehen durch den Ursprung? (Welche Originalpunkte sind durch die Matrix m zentrisch gestreckt worden?)

6. Genauere Untersuchung durch Einzeichnen der Verbindungsgeraden.
   GER_Q(matrix,i) beschreibt die Gerade, die den i.-ten Punkt des Quadrates mit seinem Bildpunkt unter Abbildung durch die Matrix m verbindet.
   Abkürzende Definition: ge(i) := ger_q(m,i) zu Erleichterung der Tipparbeit.

   Einzeichnung verschiedener Geraden ge(i) für 1<= i <= 40

7. Wird eine Ursprungsgerade gefunden, so ist der zugehörige Originalpunkt mit **element(qua,i)**, wobei der Index i mit dem Index der Ursprungsgeraden identisch ist, zu bestimmen. Den zugehörigen Bildpunkt erhält man entsprechend oder leichter durch Anwenden der matrix m auf den Originalpunkt.

8. Berechnung des "Streckfaktors" durch Lösen der Gleichung:
   Originalpunkt = Faktor * Bildpunkt
   Der "Streckfaktor" ist ein Eigenwert, der Originalpunkt und der Bildpunkt repräsentieren Eigenvektoren.

---

9. Wird unter Punkt 7 keine Ursprungsgerade gefunden, so kann die Unersuchung entsprechend mit der "Punktfigur" **Kreis** durchgeführt werden.
Die Verbindungsgeraden werden mit **ger_K(matrix,i)** konstruiert.
Für den Index i gilt hier: 0<= i <= 30

---

10. Wird weder beim Quadrat noch beim Kreis eine Ursprungsgerade gefunden, so kann der Originalpunkt frei variiert werden.
    Original- und Bildpunkt werden durch **gerade(Punkt1,Punkt2)** verbunden.

11. Systematische Variation der Originalpunktes:
Der Originalpunkt der "besten" Näherungsgeraden wird bestimmt, der "Streckfaktor" wird getrennt aus den ersten Koordinaten und aus den zweiten Koordinaten berechnet.
Es erfolgt dann die entsprechende Variation der ersten Koordinate des Originalpunktes, um die "Streckfaktoren" aus den ersten Koordinaten und den zweiten Koordinaten anzugleichen.
(Um Schreibarbeit einzusparen, empfiehlt sich ein jeweiliges Kopieren des alten Termes für den Originalpunkt op mit der Taste F3 und anschließendes S(implify) für die Gerade gerade(op,m.op). Ein erneutes Eintippen des Termes für die Gerade ist dabei nicht notwendig.)
Die zugehörigen Geraden werden mit P(lot)-P(lot) gezeichnet. Vergrößert sich der Abstand zum Urprung, so ist die Abänderung der ersten Koordinate in der anderen Richtung vorzunehmen.
Zwischendurch Löschen der alten Zeichnungen mit D(elete) A(ll) oder D(elete) B(utlast) und jeweilige Vergrößerung der Zeichnung mit F9.
Aus der "besten" Ursprungsgeraden wird erneut der Streckfaktor berechnet. Dies ist ein graphischer Näherungswert für einen Eigenwert.

mdemo2.dmo

```
"--------------------eigen1.mth------------"
"Eigenwertsuche"
qua
COLOR(qua)
m:=[[1,1],[0,2]]
BILD(m,qua)
COLOR(BILD(m,qua))
"------------------------------------"
"Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten"
"vereinfachte Schreibweise für die Geraden durch den i.-Punkt"
GE(i):=GER_Q(m,i)
GE(5)
GE(21)
"------------------------------------"
"Bestimmen des zugehörigen Originalpunktes"
ELEMENT(qua,21)
"Bestimmen des zugehörigen Bildpunktes"
m . [1,1]
"Berechnung des Streckfaktors"
[2,2]=mu*[1,1]
"------------------------------------"
"Kreis aus 30 Punkten als Ausgangsfigur"
kreis
COLOR(kreis)
BILD(m,kreis)
COLOR(BILD(m,kreis))
"------------------------------------"
"Verbindungsgeraden zwischen Original- und Bildpunkt"
GR(i):=GER_K(m,i)
GR(5)
GR(6)
GR(4)
"gr(4) ist eine erste Näherung)"
"------------------------------------"
"Zugehöriger Originalpunkt"
op:=ELEMENT(kreis,4)
"approXimate"
"Zugehöriger Bildpunkt"
m . op
"Quotient der ersten Koordinaten"
ELEMENT(op,1)/ELEMENT(m . op,1)
"Quotient der zweiten Koordinaten"
ELEMENT(op,2)/ELEMENT(m . op,2)
"------------------------------------"
"Freie Suche nach anderen Originalpunkten"
op
GERADE(op,m . op)
"Ergebnis"
op2:=[-0.737393,-0.737393]
```