BACK

Kurzeinführung DERIVE

Thomas Weth

DERIVE - A mathematical Assistant

Entwickelt von einem 2-Mann Betrieb: Software-House, Honolulu,Stoutemyer/Rich zur Unterstützung von Studenten (Naturwissenschaften/Technik)
In Österreich an jeder Schule eingeführt.

Kurzreferenz der Derive-Befehle und Menüpunkte

Algebra-Fenster

Author	öffnet die Eingabezeile
Calculus	Untermenü für Analysis (Differenzieren, Integrieren, Taylorpolynome, Grenzwertbestimmung)
Declare	Definition von Variblen, Funktionen, Vectoren, Matrizen
Expand	Ausmultiplizieren von Produkten, Partialbruchzerlegung
Factor	Faktorisieren von Termen
Help	Hilfebildschirm
soLve	Lösen von (Un-) Gleichungen, Gleichungssystemen
Manage	Wichtig zum Substituieren von Teiltermen, Einstellungen für trigonometrische Umrechnungen
Options	Einstellungen für Farben, Rechengenauigkeit, Zahlensystems, DOS-Befehle
Plot	Wechsel ins Grafikfenster
Quit	DERIVE beenden
Remove	Löschen von Zeilen
Simplify	Vereinfachen von Termen
Window	Teilen, Wechseln, Schließen von Bildschirmfenstern
approX	numerische Näherungswerte

2-D-Plot - Fenster

Algebra	Wechsel ins Algebra Fenster
Center	Zentrieren des Fadenkreuzes
Delete	Löschen von Kurven und Graphiken
Move	Fadenkreuz bewegen
Options	Bildschirmeinstellungen, Farben, Koordinatensystem (rechtwinklig, polar)
Plot	Zeichnen von Ausdrücken des Algebra-Fensters
Scale	Skalierung der Achsen

TIPS zum Umgang mit DERIVE, spezielle Kommandos

vector (f(a,b,x),Variable,Anfangswert, Endwert, [Schrittweite])
Berechnet den Ausdruck f(a,b,x) für Werte von "Variable" beginnend mit 'Anfang' bis zu 'Ende' mit dem Abstand 'Schrittweite'. Falls keine Schrittweite angegeben wird, wird automatisch 1 angenommen. "vector" kann verschachtelt werden.

if (Bedingung, Dann-teil, Sonst-teil, [Unentscheidbarkeitsteil])

if-Anweisungen können verschachtelt werden.

Besondere Zeichen:

√	Alt + q
π	Alt + p
e	Alt + e (Eulersche Zahl)
i	Alt + i ($i^2 = -1$)
∞	inf

Manche griechischen Buchstaben erhält man durch Alt + 'lateinisches Corollar'

Selektieren und Übernehmen von Ausdrücken:

Mit den Cursortasten können Sie innerhalb einer Zeile Teilterme auswählen (invertierte Darstellung).
Diese können dann mit F3 oder (in Klammern gesetzt) mit F4 in die Author-Zeile übernommen werden (**sehr praktisch!**)
Ganze Zeilen können durch Angabe der Zeilennummer mit vorgestelltem # in die Authorzeile übernommen werden.

Ersetzen von Teiltermen
Mit **Manage Substitute** können Sie invers dargestellte Teilterme durch andere auszuwählende Teilterme ersetzen (sehr praktisch!).

Einführende Aufgaben zu DERIVE

- **Arithmetik:**

a) π auf 100 Ziffern genau oder 100! 'komplett' mit allen Ziffern. (Options Precision)

b) Zerlegen Sie einige Zahlen in Primfaktoren! (Factor)
Bsp.: Mersennezahlen: $M_n = 2^n-1$, Fermatzahlen $F_n = 2^{2^n}+1$
$2^{107}-1$, $2^{127}-1$, $2^{521}-1$ sind Primzahlen,
Cole(1903): $2^{67}-1$ ist keine Primzahl (Three years of sundays!)

c) *Repunit*zahlen: 1, 11, 111, 1111, ...
allg: $(10^n-1)/9$; gesucht: Repunit-Primzahlen. Bisher gefunden: n=23, 317, 1031

d) Bringen Sie die Folge der Primzahlen (bis 1000...) auf den Bildschirm.
select(Prime(i),i,1000)
(zur Erläuterung: Prime(n) liefert "true", falls n prim ist, ansonsten "false", select(Bedingung(x), f(x), Endwert) liefert einen Vektor mit den Einträgen f(x), falls Bedingung(x) für den eingegeben x-Wert erfüllt (true) ist; die Werte der Variablen x laufen von 1 bis Endwert.
Wie lautet die 13. Primzahl, wie die 20.? (Hilfe: Element(vector,k)) liefert das k-te Element von vector)

d) Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eine Menge paarweise verschiedener Primzahlen. Demonstrieren Sie schülergemäß, daß $q := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ entweder selbst prim ist, oder nur Primteiler besitzt, die in P nicht enthalten sind. (Vgl. Euklidischer Beweis über Anzahl der Primzahlen!)

Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{n} i^k$ für k = 1,2,3,.... . (Calculus Sum)

f) Ramanujan (1887 - 1920): Beachten Sie die Konvergenzgeschwindigkeit!(Modular aufbauen!) Berechnen Sie ip := $\dfrac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4n)!(1103 + 26390\,n)}{(n!)^4\, 396^{4n}}$

- **Algebra:**

a) Zerlegen Sie $(a^4 + 4b^4)$ (verschiedene Möglichkeiten! Factor)

b) $(x^{12}-1)/(x-1)$ "ausrechnen" und in irreduzible Faktoren zerlegen (Expand oder Simplify).

c) Zur Arbeitstechnik mit DERIVE:
Multiplizieren Sie $(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)(x^2+16)(x^2+25)$ aus (Expand oder Simplify).
Der Versuch jetzt wieder zu Faktorisieren dauert unverhältnismäßig lang. (ca. 750 sec.). Ersetzen Sie x durch $\sqrt{y}$ und faktorisieren Sie dann! (Manage Substitute)

● **Gleichungen:**

a) Lösen Sie die allgemeine quadr. Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. (Solve)

b) Lösen Sie die einfachste nichttriviale kubische Gleichung:
$x^3 = x + 1$. (Solve)

c) Gegeben ist das Gleichungssystem: (I) $4x + 3y = 3$ und (II) $-3x - 2y + 3 = 0$
Lösen Sie das Gleichungssystem - am einfachsten ist wohl die Anwendung der "Einsetzmethode". Lösen Sie es "direkt" mit soLve. ([gl1, gl2])

● **graphische Darstellungen und algebraische Gleichungen:**

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Kurvenschar

$\begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix} = \left(\frac{2\,\alpha}{\alpha^2+t^2} - \alpha \,,\; \frac{2\,t}{\alpha^2+t^2} - t \right)$, wobei α den Kurvenparameter und t den Scharparameter darstellen.

a) Zeichnen Sie für verschiedene Scharparameter t einige Kurven (in Parameterdarstellung), z.B. t = 0.5, 1, 1.5 ... Welche unterschiedlichen Kurventypen erhalten Sie?

b) Eliminieren Sie aus den Gleichungen $x = \frac{2\,\alpha}{\alpha^2+t^2} - \alpha$ und $y = \frac{2\,t}{\alpha^2+t^2} - t$ den Kurvenparameter α, d.h. stellen Sie eine Gleichung zwischen den Koordinaten der Kurvenpunkte her (vgl. Übergang von Parameterdarstellung $(x,y) = (ß,ß^2)$ einer Parabel zur ihrer algebraischen Gleichung $y = x^2$).

c) Zeichnen Sie den Graphen der Relation $x^2 + y^2 = 1$ (Gleichung eingeben und PLOT)

d) Zeichnen Sie für verschiedene t-Werte die Graphen der Relationen, die unter b) gewonnen wurden.

● **Analysis**

a) Zeichnen Sie die Sinuskurve und vergleichen Sie mit Taylorentwicklungen verschiedener Ordnung. (Calculus Taylor)

b) Zeichnen Sie einige Kurven bei gegebener Parameterdarstellung (z.B.: Ellipsen: [r_1 SIN(ß), r_2 COS(ß)] oder Lissajou-Figuren [r_1 SIN(k_1ß + α), r_2 COS(k_2ß)]

● **Lineare Algebra**

a) Definieren Sie eine quadratische Matrix und berechnen Sie deren Determinante (*simplify det(..)*). Multiplizieren Sie eine Matrix, einen Vektor mit einer Matrix, Berechnen Sie die Inverse einer Matrix.

c) Lineare Abbildungen lassen sich mit 2x2-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beschreiben. Bilden Sie den

Einheitskreis $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ durch die "Matrix" mit geeigneten Werten ab (Plot). Untersuchen Sie, welchen Einfluß die Parameter a, b, c und d auf die Kreisbilder haben!

AUFGABEN zur *vector* - und *if* Anweisung.

Zeichnen Sie eine Parabelschar für $y = a\,x^2$.
Zeichnen Sie die Parabelschar $y = a\,x^2 + b\,x$

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ -x^2+2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Visualisieren (nicht simulieren!) Sie das Sieb des Erathosthenes mit Hilfe von DERIVE. (Bemerkung: *NEXTPRIME* (n) liefert die nächstgrößere Primzahl, die größer als n ist. Alt-254 liefert: ▪)

● **Sachaufgaben verbalisiert:**

Einführendes Beispiel:

Definiere:	*prozent := 1/100* und *von := 1.*
Vereinfache (Simplify):	*15 prozent von 250 Mark*
Löse (soLve):	*wieviel prozent von 250 Mark = 30 Mark*
Löse:	*15 prozent von wieviel Mark = 80 Mark*

Derive soll verstehen: x Mark zu p Prozent in t Jahren (Monaten, Wochen, Tagen)
Erstellen Sie geeignete Definitionen und lösen Sie die Aufgaben:
x Mark zu 20 Prozent in (2 Jahren + 5 Monaten) = 300 Mark.
200 Mark zu wieviel Prozent in 8 Monaten = 50 Mark.
1000 Mark zu 14 Prozent in wieviel Tagen = 25 Mark

Welche zur Zins- und Prozentrechnung wichtigen Fähigkeiten werden hier durch Derive gefördert? Was lernt der Schüler über den Umgang mit Einheiten?

Abschlußprüfung an Realschulen 1994 – Mathematik I
Aufgabengruppe B

1.0 Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $y = 1{,}5 \cdot \log_2(x-2) - 5$ und die Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 1{,}5 \cdot \log_2(x+3) + 1$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1.1 Geben Sie jeweils die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktionen f_1 und f_2 an.

1.2 Tabellarisieren Sie f_1 für $x \in \{2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10\}$ und f_2 für $x \in \{-2{,}5;\ -2;\ -1{,}5;\ -1{,}0;\ 1;\ 3;\ 5\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann die Graphen zu f_1 und zu f_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \le x \le 11$; $-7 \le y \le 6$

1.3 Punkte B_n auf dem Graphen zu f_1 und Punkte C_n auf dem Graphen zu f_2 sind zusammen mit den Punkten $A_n(x\,|\,-3)$ für $x \in \mathbb{R}^+$ die Eckpunkte von Dreiecken $A_nB_nC_n$ bzw. $A_nC_nB_n$. Dabei ist die Abszisse der Punkte B_n jeweils um 2 größer und die Abszisse der Punkte C_n jeweils um 2 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_1B_1C_1$ für $x = 1$ und das Dreieck $A_2B_2C_2$ für $x = 6$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein. Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Punkte B_n und C_n jeweils in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.
[Teilergebnis: $B_n(x+2\,|\,1{,}5 \cdot \log_2 x - 5)$; $C_n(x-2\,|\,1{,}5 \cdot \log_2(x+1) + 1)$]

1.4 Der Eckpunkt A_3 des Dreiecks $A_3B_3C_3$ liegt auf dem Graphen zu f_1. Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes A_3. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).

1.5 Zeigen Sie, daß man den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke $A_nB_nC_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n wie folgt darstellen kann:
$A(x) = [2 + 1{,}5 \cdot \log_2(x^2 + x)]$ FE.

1.6 Dreiecke $A_nB_nC_n$ erhält man mit Werten für x, die größer sind als ein bestimmter Wert $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie x_0. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).

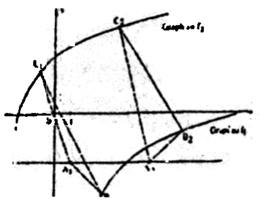
1.1 $D_1(x) = \{x\,|\,x > 2\}$; $W_1(y) = \mathbb{R}$
$D_2(x) = \{x\,|\,x > -3\}$; $W_2(y) = \mathbb{R}$ 2

x	2,5	3	3,5	4	5	6	8	10
$1{,}5 \cdot \frac{\lg(x-2)}{\lg 2} - 5$	-6,50	-5,00	-4,12	-3,50	-2,62	2,00	-1,12	-0,50

x	-2,5	-2	-1,5	-1	0	1	3	5
$1{,}5 \cdot \frac{\lg(x+3)}{\lg 2} + 1$	-0,50	1,00	1,88	2,50	3,38	4,00	4,88	5,50

Einzeichnen der Graphen zu f_1 und f_2

4



1.3 Einzeichnen der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$

$B_n(x+2\,|\,1{,}5 \cdot \log_2[(x+2)-2] - 5)$

$\underline{B_n(x+2\,|\,1{,}5 \cdot \log_2 x - 5)}$

$C_n(x-2\,|\,1{,}5 \cdot \log_2[(x-2)+3] + 1)$ 3

$\underline{C_n(x-2\,|\,1{,}5 \cdot \log_2(x+1) + 1)}$

1.4 $-3 = 1{,}5 \cdot \log_2(x-2) - 5 \qquad x > 2;\ x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \quad 2 = 1{,}5 \cdot \log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}33 = \log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow \quad 2^{1{,}33} = x - 2$

$\Leftrightarrow \quad 2{,}51 = x - 2$ 2

$\Leftrightarrow \quad 4{,}51 = x \qquad \underline{\mathbb{L} = \{4{,}51\}}$

$A_3(4{,}51\,|\,-3)$

1.5 Die Dreiecke $A_nB_nC_n$ werden von Pfeilen $\overrightarrow{A_nB_n}$ und $\overrightarrow{A_nC_n}$ aufgespannt.

$\overrightarrow{A_nB_n} = \begin{pmatrix} x+2-x \\ 1{,}5 \cdot \log_2 x - 5 - (-3) \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

$\overrightarrow{A_nB_n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \cdot \log_2 x - 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_nC_n} = \begin{pmatrix} x-2-x \\ 1{,}5 \cdot \log_2(x+1) + 1 - (-3) \end{pmatrix}$ 3

$\overrightarrow{A_nC_n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \cdot \log_2(x+1) + 4 \end{pmatrix}$

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1{,}5 \cdot \log_2 x - 2 & 1{,}5 \cdot \log_2(x+1) + 4 \end{vmatrix}$ FE

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot 1{,}5 \cdot \log_2(x+1) + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot \log_2 x - 2 \cdot 2]$ FE

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot \log_2(x+1) + 8 + 3 \cdot \log_2 x - 4]$ FE

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [4 + 3(\log_2(x+1) + \log_2 x)]$ FE

$\underline{A(x) = [2 + 1{,}5 \log_2(x^2 + x)]\ \text{FE}}$

1.6 In der Grenzlage liegen die Pfeile $\overrightarrow{A_0B_0}$ und $\overrightarrow{A_0C_0}$ aufeinander, d.h. das Dreieck $A_0B_0C_0$ hat den Flächeninhalt Null. Bei kleinerem x ändert sich der Umlaufsinn des Dreiecks:

$2 + 1{,}5 \cdot \log_2(x^2 + x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}5 \cdot \log_2(x^2 + x) = -2$

$\Leftrightarrow \quad \log_2(x^2 + x) = -1{,}33$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 2^{-1{,}33}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 0{,}40$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 0{,}40 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0{,}40}}{2} \ \vee\ x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4 \cdot 0{,}40}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 + 1{,}61}{2} \ \vee\ x = \frac{-1 - 1{,}61}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0{,}31 \ \vee\ [x = -1{,}31]$ 3/17

$\underline{\mathbb{L} = \{0{,}31\}}$

$\frac{3}{17}$

Im folgenden finden Sie die Aufgabenstellung der GK-Abituraufgabe 1989/I des Bayerischen Abiturs. Angegeben sind zusätzlich die Bewertungseinheiten. Lösen Sie die Aufgaben mit DERIVE und protokollieren Sie mit, wieviele der Bewertungseinheiten von DERIVE "gelöst" werden.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \to 2\dfrac{x+1}{e^{2x}}$ Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. (2 BE)

b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie die Lage und Art des Extrempunktes von G_f an. (6 BE)

c) Zeigen Sie nur mit Hilfe der 2. Ableitung der Funktion f, daß G_f genau einen Wendepunkt besitzt, und stellen Sie eine Gleichung der Wendetangente auf. (8 BE) (Mögliches Teilergebnis: $(2x + y - 2 = 0)$

d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$, und geben Sie eine Gleichung der Asymptoten von G_f an. (3 BE)

e) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich [-2;4] unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte f(0,5) und f(2) sowie der Wendetangente in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 2 cm) ein. (6 BE)

2.a) Zeigen Sie, daß die Funktion $F : x \to -e^{-2x}(x+1,5)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

b) Im ersten Quadranten begrenzen die Wendetangente, die x-Achse, die Gerade $x = k$ mit $k>1$ und der Graph G_f eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt A(k) dieser Fläche. (8BE)

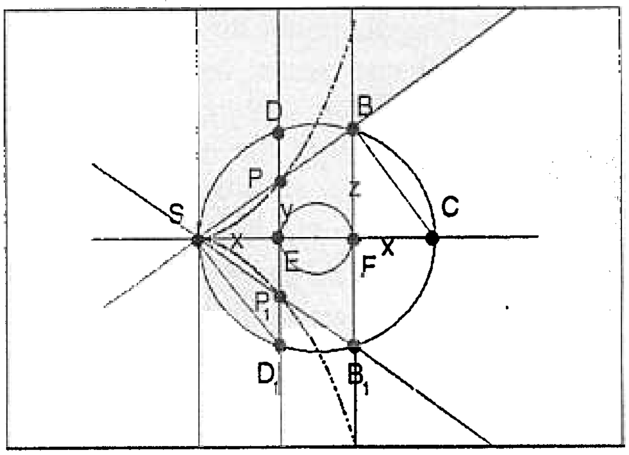
c) Kann dieser Flächeninhalt A(k) für $k \to \infty$ beliebig groß werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

Zur Bedeutung der "entdeckten" Kurven:

Die Kissoide (auch: Zissoide)

Zur Lösung des Delischen Problems (Würfelverdoppelung) (vgl. Breidenbach, 1953) wurde die Kissoide von Diokles (ca. 200 v. Chr.) erfunden. Der Name beschreibt die Ähnlichkeit der Kurve mit der Spitze eines Efeublattes (κισσός, Efeu). Im 17. Jhdt. beschäftigten sich u.a. Newton, Roberval, Fermat, Huygens und Sluse (Domherr zu Lüttich) mit dieser Kurve. Huygens schlug vor, die Kurve *Slusianische Kissoide* zu nennen, in der Literatur hielt sich aber die Verbindung des Namens zu Diokles.

Die ursprüngliche Konstruktion der Kurvenpunkte verläuft folgendermaßen:



Gegeben ist ein Kreis mit Durchmesser $|SC| = a$. Senkrecht zum Durchmesser SC werden zwei vom Mittelpunkt gleich weit entfernte Sehnen BB_1 und DD_1 konstruiert. Die Schnitte von SB und SB_1 mit DD_1 ergeben zwei Kissoidenpunkte P und P_1.

Die Koordinaten der Kissoidenpunkte (und damit die Parameterdarstellung der Kissoide) leitet man folgendermaßen her:

Mit SC als x-Achse und der Kreistangente in S als y-Achse gilt für die Höhe im rechtwinkligen Dreieck SBC: $BF = \sqrt{x(a-x)}$. Mit dem Verhältnis $y:x = BF:(a-x)$ erhält man: $y = \frac{x\sqrt{x(a-x)}}{a-x}$ und daraus die algebraische Gleichung für die Kissoide:

$y^2(a - x) - x^3 = 0$.

Mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ erhält man die Polardarstellung: $r = a \sin\varphi \tan\varphi$.

Eine Parametrisierung in kartesischen Koordinaten, welche die Kurve über den Kreis hinaus erweitert, und die neben der Polardarstellung für DERIVE die geeignete ist, lautet:

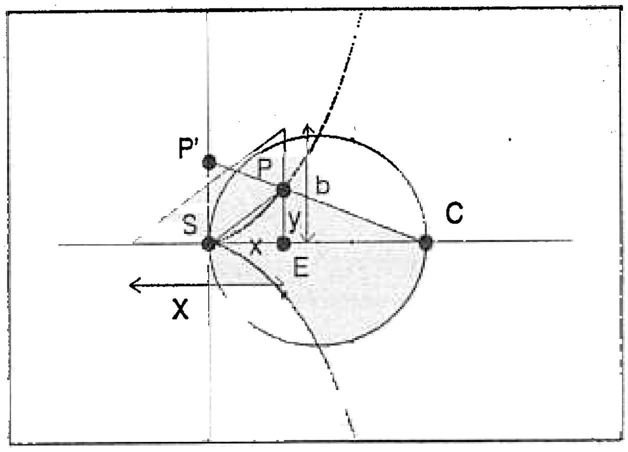
$$\text{Kissoide: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a\,\alpha^2}{1+\alpha^2} \\ \frac{a\,\alpha^3}{1+\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Die Würfelverdoppelung mit der Kissoide

Gegeben: Würfel mit Kantenlänge b und Volumen b^3.
Gesucht: Konstruktion einer Kantenlänge X, sodaß $V = X^3 = 2b^3$.

Das Problem läßt sich zurückführen auf die Lösung der doppelten Proportion:
$b : X = X : Y = Y : 2b$, welche beim Auflösen $X^3 = 2\,b^3$ ergibt.
Der Kissoidenkonstruktion (s. oben) entnimmt man:
Da $\triangle PSD_1$ und $\triangle SBC$ rechtwinklig sind, gilt ($BF = D_1E = z$ gesetzt):
$y : x = x : z$ in $\triangle PSD_1$
$x : z = z : (a - x)$ in $\triangle SBC$

$y : x = x : z = z : (a - x)$
Vergleicht man mit obiger doppelter Proportion, so sind $PE = y = b$ und $CE = SF = a\text{-}x = 2b$ als gegeben anzusehen. Zu konstruieren ist also die erste der beiden mittleren Proportionalen $SE = x = X$.



Konstruktion:

- Zeichne eine beliebige Kissoide
- Zeichne P' mit SP'= a/2.
- Verbinde P' mit C und schneide mit der Kissoide.
- Vom Schnittpunkt P fälle das Lot PE auf SC.

Nach dem Strahlensatz gilt dann: PE : EC = P'S : SC = 1:2.

PE sollte aber gleich b sein (und damit EC = 2b). Deshalb muß noch eine Streckung durchgeführt werden, die PE auf eine Strecke der Länge b abbildet und gleichzeitig x im selben Maße auf die Länge X vergrößert (vgl. Zeichnung). Für dieses (mit Hilfe der Kissoide!) konstruierte X gilt nun $X^3 = 2b^3$.

Breidenbach, W. Das Delische Problem, Stuttgart (Teubner) 1953
Oettinger, E. Die Zissoide oder "Efeuartige", Mathe-Plus (Feb 1985) (no.3) p. 4-7
Weth, Th. Ein abbildungsgeometrischer Zugang zu algebraischen Kurven dritter und höherer Ordnung, Didaktik der Mathematik (19) 1991 H.2, S. 145-164
Weth, Th. "Kurvenlexikon" in verschiedenen Derive-News-Letters