BACK

Heinz SCHUMANN

Ansatzorientiertes Lösen von Textaufgaben mit Computeralgebra

Die Schüler und Schülerinnen müssen verstärkt jene intellektuellen Fähigkeiten erlernen, die der 'Computer' (noch) nicht besitzt oder niemals besitzen wird.

Einleitung

Zirka 2/3 der Unterrichtszeit für die Schulalgebra in der Sekundarstufe I werden verwendet, um folgendes Ziel anzustreben: Die Schüler/Schülerinnen können Terme automatisiert umformen bzw. vereinfachen und bestimmte Typen von Gleichungen und (linearen) Gleichungssystemen automatisiert lösen. Diese Kalkülqualifikation ist bisher eine notwendige Voraussetzung, um z.B. komplexere Algebra-Aufgaben mit inner- oder außermathematischem Bezug lösen zu können. Solche Aufgaben werden in Form von Textaufgaben gestellt; sie bilden ein wichtiges Übungsfeld für das Problemlösen. (Eine Vielzahl von Textaufgaben sind sog. eingekleidete Aufgaben, über deren Sinnhaftigkeit man geteilter Meinung sein kann.) Das Lösen von Textaufgaben ist erfahrungsgemäß bei den Schülern und Schülerinnen nicht sehr beliebt, denn zusätzlich zur Anwendung des betreffenden arithmetisch-algebraischen Kalküls treten vor allem Probleme der Übersetzung des Aufgabentextes in die algebraische Sprache auf. Diese Probleme werden im realen Unterricht kaum thematisiert; ein expliziertes Metawissen zu ihrer Bewältigung wird nicht entwickelt, obwohl sich in der didaktischen Literatur entsprechende Handlungsanweisungen finden (auch solche mit dem Nachweis ihrer unterrichtspraktischen Relevanz). So gibt zum Beispiel G. Pólya folgende allgemeine Anweisung (die hier nur verkürzt wiedergegeben werden soll):

Wie sucht man die Lösung?

Erstens
Du mußt die Aufgabe verstehen!

Zweitens
Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten!
Du mußt vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann!
Du mußt schließlich einen Plan der Lösung erhalten!

Drittens
Führe Deinen Plan aus!

Viertens
Prüfe die erhaltene Lösung!

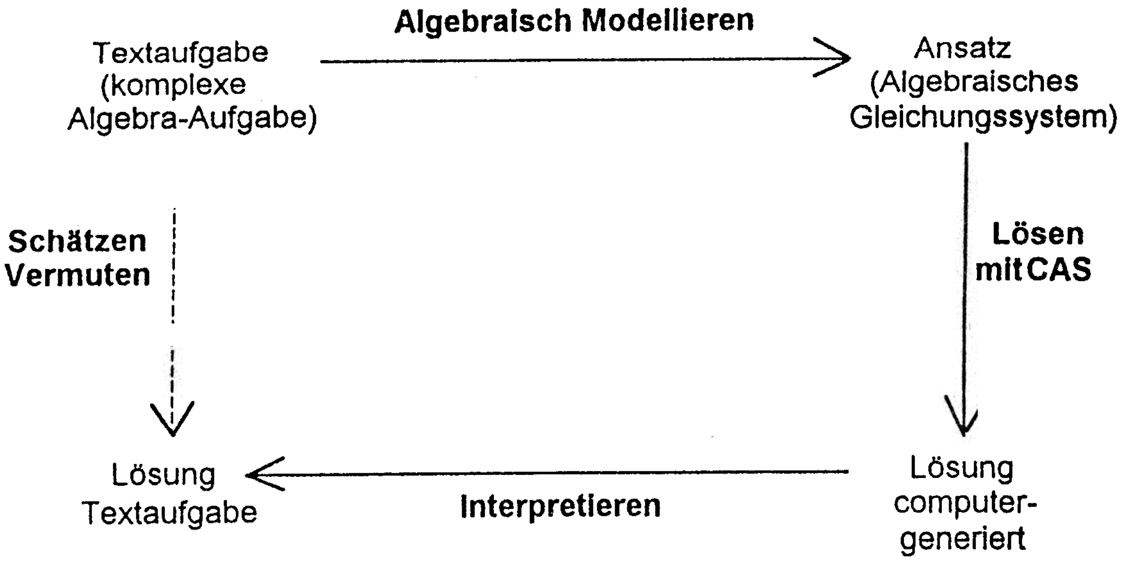
Diese Anweisung hebt besonders die Lösungsplanung hervor, die aber durch das planlose Vorgehen, das Schülerinnen und Schüler beim Lösen von (Text-) Aufgaben häufig zeigen, konterkariert wird. Dieses Verhalten der Schüler und Schülerinnen ist nicht verwunderlich, haben Sie doch nicht gelernt, wie man eine Lösung plant, obwohl Arbeitsplanung ein wichtiges Merkmal gegenstandsunabhängiger Methodenkompetenz ist, die in einem allgemeinbildenden Unterricht vermittelt werden sollte. - Es stellt sich die Frage, wie der Planungsaspekt beim Lösen von (Algebra-) Aufgaben verstärkt werden kann?

- Einerseits sicherlich durch das Behandeln und Benutzen von Handlungsanweisungen für das Aufgabenlösen, andererseits durch einen geeigneten Computereinsatz, der eine entsprechende Planung erforderlich macht. Der dafür entstehende Bedarf an Unterrichtszeit kann nur durch eine Reduktion des algorithmischen Berechnungsaufwands bei der Planungsausführung, der auf die Schüler und Schülerinnen eher demotivierend wirkt, kompensiert werden.

Das ansatzorientierte Lösen mittels einer Löse-Automatik

Der Lösungsplan bzw. Ansatz vieler komplexer Algebra-Aufgaben allgemeiner oder spezieller Art, das Ergebnis einer algebraischen Modellierung, besteht aus einem (expliziten oder impliziten) algebraischen Gleichungssystem, das die Beziehung von gegebenen und gesuchten Größen sowie von Hilfsgrößen ausdrückt und das bei Elimination der Hilfsgrößen nach den gesuchten Größen aufzulösen ist.

Algebraische Gleichungssysteme kann man aber mit Hilfe von Computeralgebrasystemen (CAS) automatisch auflösen lassen. (Natürlich hängt die exakte Auflösbarkeit von den mathematischen Grenzen und den Grenzen der praktischen Berechenbarkeit - abhängig von der Anzahl der Variablen und dem Grad des betreffenden algebraischen Gleichungssystems ab. - Die Entwicklung eines optimalen Algorithmus für das Auflösen eines algebraischen Gleichungssystems ist eine aktuelle Forschungsaufgabe der Computeralgebra.) Das bedeutet für die Schüler und Schülerinnen: Konzentration auf die Entwicklung eines Ansatzes und auf die Interpretation des computergenerierten Ergebnisses usw.; das Ausrechnen des Ansatzes besorgt der Symbolprozessor eines geeigneten CAS (s. Schema).



Die allgemeinen Vorbemerkungen sollen nun am Beispiel einer komplexen Sachrechenaufgabe aus dem Themenkreis "Weg - Geschwindigkeit" konkretisiert und exemplarisch verdeutlicht werden.

Aufgabe

Von zwei Orten A und B gehen gleichzeitig zwei Wanderer los. Sie laufen einander entgegen. Als sie sich treffen, hat der erste vier (a) Kilometer mehr als der zweite zurückgelegt. Wenn sie ihren Weg mit den gleichen Geschwindigkeiten fortsetzen, kommt der erste drei (m) Stunden nach der Begegnung in B der zweite fünf (n) Stunden nach der Begegnung in A an. Bestimme die Geschwindigkeiten der beiden Wanderer.

Das Ergebnis einer möglichen Ansatzentwickung für die spezielle Aufgabe könnte sein:

$$
\begin{aligned}
&CA \text{ km} - CB \text{ km} = 4 \text{ km},\\
&v_1 = \frac{CB}{3} \text{ km/h}, \; v_2 = \frac{CA}{5} \text{ km/h},\\
&v_1 = \frac{AC}{t_1}, \; v_2 = \frac{BC}{t_2}\\
&t_1 = t_2,\\
&AC = CA, \; BC = CB
\end{aligned}
$$

Dieser Ansatz ist nach v_1, v_2 aufzulösen, dabei sind zu eliminieren: AC, CA, BC, CB, t_1, t_2. Zur automatischen Auflösung eines solchen Ansatzes, der ein algebraisches Gleichungssystem darstellt, eignet sich die Solve-Automatik von Mathematica, da sie die Elimination von Hilfsvariablen gestattet. Die Solve-Automatik muß aber verändert werden, so z.B. sind die komplexzahligen Lösungen für unsere Zwecke zu entfernen (vgl. [1]).

Zunächst lassen wir den speziellen Ansatz mit der modifizierten Solve-Automatik näherungsweise bzw. exakt auflösen (s. Eingabe und Ausgabe 1/2; die jeweils erste Lösung entfällt; QW bedeutet Quadratwurzel). Die exakte Lösung zusammen mit dem Ansatz der entsprechenden allgemeinen Aufgabe ist in Eingabe und Ausgabe 3 zu sehen; die zweite negative Lösung entfällt; Lösbarkeitsbedingung: n $\geq$ m > o. Eine Formulierung des allgemeinen Ansatzes in "Ganzwortvariablen" zeigt Eingabe 4.

Anmerkung: Da es uns auf die prinzipielle Möglichkeit des automatischen Auflösens eines ganzen Ansatzes ankommt, sehen wir hier von den mehr soft-wareergonomischen Problemen wie z.B. daß Mathematica vorerst nur ein kommandogetriebenes Werkzeug ist, vorerst nicht über einen Formeleditor verfügt etc. ab.

Ein einmal implementierter Ansatz als Ansatz einer Aufgabenklasse kann verwendet werden, um z.B. die Menge der gegeben, gesuchten sowie der zu eliminierenden Variablen zu variieren (s. Eingabe und Ausgabe 5. Gesucht sind hier Weglänge und Laufzeit bis zum Treffpunkt für den ersten Wanderer; die erste Lösung entfällt) oder um spezielle näherungsweise Lösungen zu bestimmen und zu variieren (s. Eingabe und Ausgabe 6-8; im letzten Beispiel kann es keine positive Lösung geben). Die "operative Fragestellung": Was geschieht ..., wenn ...? kann verfolgt werden. Ebenso wie ein implementierter

```
NLoese[{CA km-CB km==4 km,
        v1==CB/3 km/h,v2==CA/5 km/h,
        v1==AC/t1,v2==BC/t2,
        t1==t2,
        AC==CA,BC==CB},
       {v1,v2},
       {AC,CA,BC,CB,t1,t2}]
        0.450807 km       -0.581989 km
{{v2 == -----------, v1 == ------------},
             h                  h

        3.54919 km        4.58199 km
 {v2 == ----------, v1 == ----------}}
            h                 h
```

Eingabe u. Ausgabe 1

```
Loese[{CA km-CB km==4 km,
       v1==CB/3 km/h,v2==CA/5 km/h,
       v1==AC/t1,v2==BC/t2,
       t1==t2,
       AC==CA,BC==CB},
      {v1,v2},
      {AC,CA,BC,CB,t1,t2}]
        (10 - 2 QW[15]) km          2 (3 - QW[15]) km
{{v2 == ------------------, v1 == -----------------}
               5 h                       3 h

        2 (5 + QW[15]) km         2 (3 + QW[15]) km
 {v2 == -----------------, v1 == -----------------}
               5 h                      3 h
```

Eingabe u. Ausgabe 2

```
Loese[{CA-CB==a,
       v1==CB/m,v2==CA/n,
       v1==AC/t1,v2==BC/t2,
       t1==t2,
       AC==CA,BC==CB},
      {v1,v2},
      {AC,CA,BC,CB,t1,t2}]
                    a
{{v2 == ----------------------,
        (-QW[m] + QW[n]) QW[n]

                    a
  v1 == ----------------------
        QW[m] (-QW[m] + QW[n])

                    a
 {v2 == ---------------------,
        (QW[m] + QW[n]) QW[n]

                      a
  v1 == -(---------------------)}}
          QW[m] (QW[m] + QW[n])
```

Eingabe u. Ausgabe 3

```
Loese[{CA-CB==Wegdifferenz,
       Geschwindigkeit1==CB/Restzeit1,
       Geschwindigkeit2==CA/Restzeit2,
       Geschwindigkeit1==AC/Zeit1,
       Geschwindigkeit2==BC/Zeit2,
       Zeit1==Zeit2,
       AC==CA,BC==CB},
      {Geschwindigkeit1,Geschwindigkeit2},
      {AC,CA,BC,CB,Zeit1,Zeit2}]
```

Eingabe 4

```
Loese[{CA-CB==a,
       v1==CB/m,v2==CA/n,
       v1==AC/t1,v2==BC/t2,
       t1==t2,
       AC==CA,BC==CB},
      {t1,AC},
      {AC,CA,BC,CB,v1,v2,t2}]
            a QW[n]
{{AC == -------------, t1 == -(QW[m] QW[n] },
        QW[m] + QW[n]

            a QW[n]
 {AC == --------------, t1 == QW[m] QW[n]
        -QW[m] + QW[n]
```

Eingabe u. Ausgabe 5

```
NLoesePositiv[{m==3,n==5,a==4,
               CA-CB==a,
               v1==CB/m,
               v2==CA/n,
               v1==AC/t1,
               v2==BC/t2,
               AC==CA,BC==CB,
               t1==t2},
              {v1,v2},
              {AC,CA,BC,CB,t1,t2}
{v2 == 3.54919, v1 == 4.58199}
```

Eingabe u. Ausgabe 6

```
NLoesePositiv[{m==2.7,n==3.9,a==1.5,
               CA-CB==a,
               v1==CB/m,
               v2==CA/n,
               v1==AC/t1,
               v2==BC/t2,
               AC==CA,BC==CB,
               t1==t2},
              {v1,v2},
              {AC,CA,BC,CB,t1,t2}]
{v2 == 2.29006, v1 == 2.75231}
```

Eingabe u. Ausgabe 7

```
NLoesePositiv[{m==8,n==6.4,a==3,
               CA-CB==a,
               v1==CB/m,
               v2==CA/n,
               v1==AC/t1,
               v2==BC/t2,
               AC==CA,BC==CB,
               t1==t2},
              {v1,v2},
              {AC,CA,BC,CB,t1,t2}]

{}
```

Eingabe u. Ausgabe 8

Text, eine implementierte Grafik oder Tabelle wird nun auch ein Ansatz zum Gegenstand des experimentellen Manipulierens mit vielfältigen Intentionen.
In Konsequenz ergeben sich eine Reihe von Aufgabentypen, die bereits beim Ansatzorientierten Lösen ohne Computeralgebra-Einsatz behandelt werden könnten: Ansätze entwickeln, begründen, auf Vollstängigkeit und Richtigkeit prüfen, vervollständigen, variieren, spezialisieren, verallgemeinern, analogisieren; (computergenerierte) Lösungen analysieren, interpretieren, kontrollieren.
Weitergehende Überlegungen und Beispiele können [2] entnommen werden.

[1] Schumann, H.: "Ansatzorientiertes Lösen von Algebra-Aufgaben mit Computeralgebra". Erscheint voraussichtlich 1996 bei F. Dümmlers, Bonn.

[2] Schumann, H.: "Ansatzorientiertes Lösen komplexer Algebra-Aufgaben mit Computeralgebra" MNU (47), Heft 8, 1994, S. 496-502

Anschrift des Autors: Prof. Dr. H. Schumann, Gehrenäcker 8, D-88289 Waldburg