BACK

Stochastische Populationsentwicklung

Gregor Noll, Erpel / Rh.

Ausgehend von einer Aufgabenstellung, die zurückgeht auf einen Artikel von P.Drijvers [1], wird in drei Arbeitsblättern die Veränderungen am Bestand einer Population von Lebewesen untersucht. Das zugrundeliegende Modell basiert auf sehr einfachen Regeln. Dennoch führt es zu interessanten Fragestellungen, die von den Schülerinnen und Schülern algebraisch und mit Hilfe von graphischen Darstelllungen gelöst werden sollen.

Der „Mathematikassistent" *DERIVE* erlaubt es, Algebra- und Graphikfenster parallel auf dem Bildschirm zu betrachten und zu verwalten. Damit ist eine besonders gute Unterstützung des so fruchtbaren Wechselspiels zwischen Graphik und Algebra, zwischen Veranschaulichung und theoretischer Durchdringung gegeben. Auf diese methodische Anreicherung, die den Unterricht sehr lebendig und interessant machen kann, sollte man nicht verzichten.

Literatur:

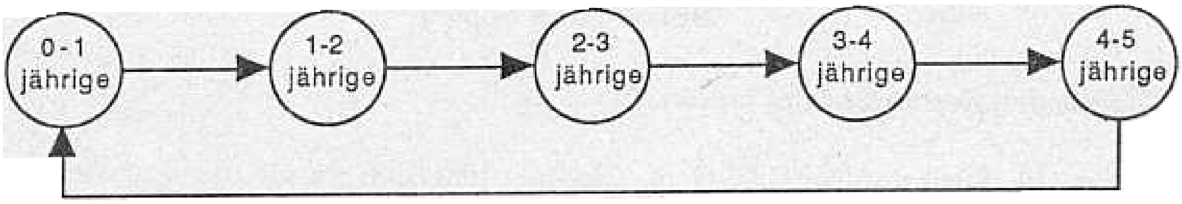
[1]	Drijvers, P.	*DERIVE* in the classroom in: Böhm (Hrsg.): *Teaching Mathematics with DERIVE* Chartwell-Bratt Ltd. 1992
[2]	Barzel, B. Drijvers, P.	LINEARE ALGEBRA - Matrizen mit *DERIVE* MBU, Heft 5/93·1 Bergmoser+Höller Verlag GmbH, Aachen 1993
[3]	Lehmann, E.	Endliche homogene Markoffsche Ketten Bayerischer Schulbuch Verlag, München 1973

Stochastische Populationsentwicklung (1)

Die Entwicklung einer Population von Lebewesen läßt sich unter stark vereinfachenden Voraussetzungen als stochastischer Prozeß behandeln, der überraschende Ergebnisse liefert.

> *Die Anzahl der Lebewesen einer Population ändere sich wie folgt: von den maximal einjährigen Lebewesen werden 80% älter, dies gilt auch für die ein- bis zweijährigen. Von den zwei- bis dreijährigen überleben 62,5%, von den drei- bis vierjährigen Lebewesen noch 50%.*
> *Nur die vier- bis fünfjährigen tragen im letzten Jahr ihres Lebens zur Erhaltung der Population bei und zwar mit genau fünf Nachkommen pro Lebewesen.*

1. Ergänzen Sie in der folgenden Graphik die Übergangsquoten :



2. Die Population habe augenblicklich den folgenden Bestand:

1. Generation: 2000	2. Generation: 1000	3. Generation: 1000
4. Generation: 750	5. Generation: 500	

   Welcher Bestand liegt nach einem weiteren Jahr vor?

3. Die Änderung des Bestandes läßt sich als „Anwenden" einer „Übergangsmatrix" **M** auf einen „Bestandsvektor" **v** beschreiben.
   Bestimmen Sie die den Bestandsvektor für Aufgabe 2 und die Übergangsmatrix!

4. Geben Sie **v** und **M** in ein *DERIVE* - Arbeitsblatt ein!
   Matrizen lassen sich über die Menüauswahl *Declare-Matrix* besonders einfach eingeben. Der Bestandsvektor ist dabei eine einspaltige Matrix.
   Die Ergebnisse haben eine Zeilennummer z. B. #1 für den Vektor und #2 für die Matrix. Über die *Author*-Eingabe v:=#1 und M:=#2 können den Ergebnissen Namen zugewiesen werden.
   (*DERIVE* erlaubt mehrbuchstabige Namen und unterscheidet groß und klein geschriebene Bezeichner, wenn man dies mit *Options-Input-Mode-Word* bzw. *Options-Input-Case-Sensitive* einstellt.)

Stochastische Populationsentwicklung (2)

Es sollten die folgenden *DERIVE* - Definitionen vorhanden sein:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v := \begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 750 \\ 500 \end{bmatrix}$$

5. Überprüfen Sie mit Hilfe von *DERIVE* Ihr Ergebnis aus Aufgabe 2

6. Verfolgen Sie die Entwicklung der Population über einen Zeitraum von acht Jahren. Was fällt Ihnen dabei auf?

7. In *DERIVE* verwendet man zur Lösung der Aufgabe 6 sinnvollerweise Funktionen. Hier einige Vorschläge:

   $$\text{BESTAND(j)} := M^j\, v$$

   liefert den Bestand nach j Jahren.

   Über die Funktion VECTOR (s. Glossar) läßt sich damit die Entwicklung für mehrere Jahre als Liste berechnen (z. B. vom Jahre 0 bis zum Jahre j):

   ENTWICKLUNG(j) := VECTOR(BESTAND(x),x,0,j)

   Überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse zu Aufgabe 6.

8. Betrachten Sie das Verhalten einer Population, die mit folgender Verteilung beginnt:

   1. Generation: 2000 2. Generation: 2000 3. Generation: 1000
   4. Generation: 750 5. Generation: 500

   Untersuchen Sie die Entwicklung dieser Population wiederum auf Besonderheiten.

9. Zeigen Sie, daß **M**^{5} die Einheitsmatrix **E** darstellt. Wie hängt dies mit den vorherigen Ergebnissen zusammen?

Stochastische Populationsentwicklung (3)

10. *„Ein Bild sagt mehr als tausend Worte“*. Wir folgen diesem Spruch und stellen die Entwicklung einer speziellen Altersgruppe, z. B. der Ein- bis Zweijährigen graphisch dar. Dazu verwenden wir als Koordinatenpaare:

    [j , ELEMENT(BESTAND(j),altersgr,1)]

    Das Jahr j der Entwicklung ist unsere x-Koordinate. Die y-Koordinate wird durch den zugehörigen Bestand gebildet. Wir greifen dazu in jedem Jahr j auf die Zeile der betreffenden Altersgruppe (in der 1. Spalte) des Bestandsvektors zu.
    Mit den Koordinatenpaaren erzeugen wir uns eine Liste für mehrere Jahre:

    KOORD(altersgr,jahre) := VECTOR([j,ELEMENT(BESTAND(j),altersgr,1)],j,0,jahre)

    Das von *DERIVE* nach *Simplify* ausgegebene Ergebnis läßt sich über das *Plot-Menü* unmittelbar graphisch darstellen. Für eine neben dem *Algebra*-Fenster liegende Graphik ist folgende Skalierung *x=2, y=500* mit *Move x=4 y=1250 Center* geeignet.

11. Was ändert sich, wenn die Anzahl der Neugeborenen von fünf auf vier zurückgeht. Was geschieht, wenn sie auf über fünf ansteigt?
    Fertigen Sie zur Beantwortung der Fragen jeweils graphische Darstellungen an!

12. Wie lassen sich die Ergebnisse aus Aufgabe 11 erklären?

13. Bestimmen Sie eine Funktion, deren Graph durch die Maximalwerte der fünfjährigen Zyklen der ersten Generation verläuft. Wie lautet sie für die Minimalwerte der fünften Generation?

14. Finden Sie weitere Übergangsmatrizen, die zu einer fünfjährigen periodischen Entwicklung führen.

15. Führen Sie Modellvariationen ein, z.B. Geburten bei anderen Altersgruppen und untersuchen Sie, wie sich dadurch die Entwicklung der Population verändert.