BACK

Günter Schmidt, Stromberg

Anschaulicher und lebendiger Mathematikunterricht in der SII mit DERIVE

Vorbemerkungen

In der ersten Ankündigung des Vortrags fehlte der Zusatz „... mit DERIVE". Dies geschah mit Absicht, und es lagen dafür verschiedene Begründungen vor. Eine Begründung betrifft mehr eine grundsätzliche Auffassung zum Mathematikunterricht im Zusammenhang mit dem Computereinsatz, eine andere fußt auf den persönlichen Erfahrungen im Rahmen von Lehrplanarbeit und der damit verbundenen Lehreraus- und -fortbildung, insbesondere auf der Arbeit mit Entwicklung von Konzeptionen und Materialien zum Thema „Mathematikunterricht mit dem Werkzeug Computer" [1]. Die Auffasungen und Erfahrungen werden im folgenden näher ausgeführt und im Hinblick auf die Tagungsthematik erläutert . Abschließend sollen die mehr allgemeinen Überlegungen an einem Beispiel der „Tennisballpyramide" exemplarisch konkretisiert werden.

Mathematikunterricht und DERIVE

Der Mathematikunterricht befindet sich im Umbruch. DERIVE - oder allgemeiner Computeralgebrasysteme sind nicht die entscheidende Ursache für die Veränderungen. Deshalb ist es nach unserer Auffassung auch nicht nützlich, eine auf Computeralgebra basierende Didaktik für den Mathematikunterricht zu propagieren, dies bedeutet eine unzulässige Reduktion. Die Einsicht in die Veränderungsnotwendigkeit im Mathematikunterricht wird aus verschiedenen Quellen gespeist, DERIVE (CAS, Computer) ist eine dieser Quellen und unterstützt bzw. ermöglicht manche dieser Veränderungen, so zum Beispiel eine stärkere Anschaulichkeit und Lebendigkeit. Dies ist aber nur ein Potential, das richtig genutzt werden muß. Das heißt also, der Blick muß von Unterrichtskonzeptionen auf DERIVE gerichtet sein, nicht umgekehrt.

Deshalb werden zunächst einmal die nach unserer Auffassung wichtigen Entwicklungslinien für den Mathematikunterricht aufgezeigt, anschließend werden die Möglichkeiten der Unterstützung solcher Tendenzen durch DERIVE aufgezeigt.

Entwicklungslinien Mathematikunterricht

Integrierte und problemorientierte Zugänge

Als wichtige Ergänzung zu dem überwiegend nach Disziplinen und Gebieten geordneten Aufbau zurückliegender Lehrpläne und Lehrbücher finden integrierte und problemorientierte Zugänge zu mathematischen Begriffen und Verfahren besondere Berücksichtigung . Dies bedeutet häufiger eine gebietsübergreifende Behandlung mathematischer Themen und damit sowohl die Verbindung von Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik in geeigneten Problemsituationen als auch die Berücksichtigung fächerübergreifender Bezüge. Die Lernsequenzen sind weniger linear-sequentiell als vielmehr problemorientiert und beziehungshaltig aufgebaut.

Aktives und experimentelles Lernen

Aktiv entdeckende und experimentelle Lernformen haben für den Mathematikunterricht eine große Bedeutung. Beobachtungen, Erfahrungen und Alltagswissen der Lernenden werden zu Ausgangspunkten von Lernprozessen. Im

Lernprozeß werden die Vorerfahrungen aufgegriffen, weitergeführt und zu theoretischen Konzepten verdichtet. Eine wesentliche Rolle im Unterricht spielt dabei die Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler. Sie können eigene Problemlösestrategien entwickeln und auf ihre Tauglichkeit überprüfen. Die Rückmeldungen über die Eignung der Strategien erfolgen dabei häufig von der Sache aus und nicht ausschließlich von der Lehrperson. Das Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten wird entwickelt und gestärkt. Gleichzeitig nehmen Schülerinnen und Schüler Einfluß auf die Ziele und die Gestaltung des Unterrichts.

Anschaulichkeit

Die letztlich sehr abstrakten Begriffe der Mathematik bedürfen zur verständigen Einordnung und Anwendung der vielfältigen Veranschaulichung. Hierzu gehören geometrische Anschauungen ebenso wie Tabellen und Graphen oder situative Bezüge. Experimentelle Zugänge zu Begriffen und deren Anwendung in unterschiedlichen Situationen unterstützen die Veranschaulichung und damit das Verständnis.

Bedeutungsvolle Mathematik

Mathematik soll in (für die Lernenden) verständlichen Sinn- und Sachzusammenhängen erworben werden. Die Genese und Entwicklung von Begriffen, interessante Anwendungen, das eigenständige Modellieren von Sachsituationen, aber auch das Begreifen und Erleben ästhetischer Aspekte und das Erfassen von Zusammenhängen und Verbindungen vermitteln Bedeutung und Sinn von Mathematik. Dies führt von allzu fachspezifischer Beschränkung weg zur stärkeren Öffnung zu interdisziplinären und vernetzten Problemen. Damit wird ganzheitliches Lernen verlangt, d.h. parallel zum Wissen werden auch die Fähigkeit zur Anwendung und Nutzung, Kenntnisse und Bewertungen über die Anwendungswirkung auf die Schülerin oder den Schüler selbst und die Gesellschaft einbezogen.

Soziales Lernen

Im Interesse der allgemeinbildenden und erzieherischen Ziele muß auch der Mathematikunterricht Formen des sozialen Lernens einbeziehen. Es gibt viele sinnvolle Gelegenheiten zur Partner- und Gruppenarbeit im Mathematikunter-richt. Insbesondere im Rahmen von „Bedeutungsvoller Mathematik" können positive Einstellungen und Fähigkeiten zur Teamarbeit erworben werden. Kommunikation und Diskussion spielen u.a. bei Modellierungen und interdiszi-plinären Fragestellungen eine entscheidende Rolle.

Differenzierung

Die sehr unterschiedlichen Vorerfahrungen, Werteinstellungen und Verhaltensweisen der heutigen Schülerinnen und Schüler verlangen eine starke Binnendifferenzierung auch im Mathematikunterricht. Dies betrifft sowohl die Berücksichtigung verschiedener Lernstile als auch der Interessen und spezifischen Fähigkeitsprofile.

In der folgenden Übersicht sind die oben genannten „prozeßbeonten" Aspekte von Mathematikunterricht (linke Spalte) jeweils in Gegenüberstellung zu den mehr statischen Auffassungen von Mathematikunterricht (rechte Spalte) tabellarisch festgehalten:

Entwicklungslinien Mathematikunterricht

visualisiertes Lernen	sprachlich-symbolhaftes Lernen
entdeckendes, explorierendes Lernen offenes Konzept	statisch, linear-systemhaft, Fertigprodukt geschlossenes Konzept
handelndes, produktorientiertes Lernen	beschreibend, analysierend, aufnehmend
Herausstellen und Nutzen von Querverbindungen, gebiets- und fächerübergreifenden Aspekten ("horizontales Lernen", "modularer Aufbau")	Lernen in abgegrenzten Disziplinen "Schubladenlernen" ("vertikales Lernen", "linearer Aufbau")
aktives Modellieren als Prozeß	Darbieten von Modellen
Ästhetisches Erleben (emotionale Komponente)	Beschränkung auf analytisches, kalkülmäßiges Erschließen (kognitive Komponente)
Orientieren an Leitbegriffen, Fundamentalen Ideen (Funktion, Iteration Linearität - Komplexität....)	Orientierung an Fachdisziplinen Systematik

Computer als Werkzeug

Interaktions- und Arbeitsformen im MU
(Projektarbeit, Gruppenarbeit, Teamarbeit)
(Simulationen/Spiele)

Wir wollen nun zunächst die in der linken Spalte aufgeführten Entwicklungslinien im Blick auf DERIVE beleuchten. Dabei sind die positiven Möglichkeiten mit + bezeichnet, Grenzen und evtl. Gefahren mit -. Die aufgezählten Aspekte haben exemplarischen Charakter, sie erheben keinesfalls einen Anspruch auf Vollständigkeit.

Entwicklungslinien	DERIVE im Unterricht
visualisiertes Lernen	+ grafische Darstellung von Daten und Termen, Funktionen/Kurven , insbesondere auch in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten, 3D-Darst., An.Geom.im R^2, graf.Darst.von Simulationen und Verteilungen - Algorithmen zu Chaos/Fraktale lassen sich nicht besonders günstig visualisieren, CABRI, CAD, bewegte Bilder
entdeckendes, explorierendes Lernen offenes Konzept	+ Unterstützung durch „Was passiert, wenn..", Vermutungen können realisiert werden (auch algebraisch) - Einengung durch Softwarekonzept!!! Explorative Datenanalyse, CABRI, ...
handelndes, produktorientiertes Lernen	- zielt auf den 1.Blick auf andere Aspekte (reale Modelle, MUED, ...) + erzwingt Dokumentation -> Graphen/Tabellen
Herausstellen und Nutzen von Querverbindungen, gebiets- und fächerübergreifenden Aspekten ("horizontales Lernen", "modularer Aufbau")	+ systematisch-hierarchiches Vorgehen nicht mehr zwingend, der Weg „von der Krone zur Wurzel" wird möglich, damit Annäherung vom Kern, CAS als Brücke (FIT, Gleichungssysteme, Simulation,...) - algebraisch analytische Lösungen werden bevorzugt, ganzheitlich-geometrische Ansätze werden nicht unterstützt (etwa bei Extremwertproblemen)
aktives Modellieren als Prozeß	+ technische Schwierigkeiten werden geringer, Konzentration auf Modellieren und Interpretieren reale Daten können verarbeitet werden - bei komplexen Problemen ist spezifisches Programm überlegen
Ästhetisches Erleben (emotionale Komponente)	+ Möglichkeiten vorhanden - eingeschränkte Möglichkeiten eigene händische Aktivität/ Kreativität, persönlicher Rückbezug
Orientieren an Leitbegriffen, Fundamentalen Ideen (Funktion, Iteration Linearität - Komplexität ....)	+ funktionales Denken, Iteration/Rekursion, Dynamik, prozessualer Aufbau von Begriffen - dies geht nicht von DERIVE aus, kann sogar bei falschem Verständnis von Computereinsatz verhindert werden

An dieser Stelle soll noch eine Bemerkung angefügt werden, die auf die langjährigen Erfahrungen mit dem Einsatz des Computers als Werkzeug im Mathematikunterricht zurückgeht. Es gibt fast für jedes Thema des Mathematikunterrichts eine spezielle Software, die für dieses Thema besser geeignet ist als DERIVE. Der Vorteil von DERIVE demgegenüber besteht in der Möglichkeit des langfristigen und kontinuierlichen Einsatzes einer Software in sehr vielen Themengebieten. Schülerinnen und Schüler (und Lehrer!) können sich so mit einer gewissen Selbstverständlichkeit des (offenen) Werkzeugs bedienen, ohne daß jedesmal die Einarbeitung in ein neues System erfordert wird. Neben der mathematischen Inhalts- und Methodenkompetenz wächst auf diese Weise auch die Kompetenz im Handhaben eines solch universellen Werkzeugs.

Neben der in obiger Tabelle erfolgten Ausrichtung an den Entwicklungslinien sollen ergänzend noch einmal allgemeiner die Chancen beschrieben werden, die mit dem Einsatz von Computeralgebrasystemen im Unterricht verbunden sind. Anschließend werden dann die damit verbundenen Änderungs- und Umgewichtungsnotwendigkeiten und einige der offenen Probleme angedeutet.

Chancen

- Kalkülfähigkeiten, insbesondere die Termmanipulation verlieren ihre (faktisch) beherrschende Stellung im Mathematikunterricht. Damit kann mehr Zeit auf die übergeordneten Ziele des Aufstellens von Termen, der Beschreibung von Situationen mit Hilfe von Termen und deren Interpretation verwendet werden.
- In der Analysis wird die schon lange geforderte Verschiebung vom Kalkül zum Begriffsverständnis möglich. Die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Termen und Funktionen (insbesondere die Parameterdarstellung) heben die Beschränkung auf wenige Funktionstypen auf, insbesondere können wichtige algebraische Kurven und deren Anwendungen thematisiert werden, ebenso kalkülmäßig aufwendigere Eigenschaften wie Krümmung, Bogenlänge u.ä..
- Die Behandlung von Abbildungen erfährt eine Akzentverschiebung von der statischen Klassifizierung zur dynamischen Durchführung, insbesondere auch in stochastischen Situationen (Markov-Prozesse) oder im Hinblick auf iterierte Funktionensysteme (Fraktale).
- Experimentelles Arbeiten im Sinne von „Was passiert, wenn..?“ und der Variation von Parametern wird in größerem Umfang im Mathematikunterricht möglich. Auch die Simulation als Problemlösung wird möglich. Iteration und Rekursion finden stärkere Berücksichtigung. Damit gewinnt insgesamt der Prozess gegenüber dem statischen Endergebnis eine besonders für das Lernen günstige Bedeutung.
- Auch das Anwenden von Mathematik kann in zweierlei Hinsicht eine Anreicherung erfahren. Einmal wird durch den Wegfall numerischer und kalkülmäßiger Beschränkung eine größere Realitätsnähe erreichbar, zum anderen begünstigen die vielfältigen Werkzeuge den Prozess des Modellierens.
- Das interaktive Arbeiten mit CAS begünstigt bzw. erfordert andere Lern- und Arbeitsformen im Unterricht, insbesondere offenere und partner- bzw. teambezogene Formen. CAS bieten vom Lehrer unabhängige Kontrollmöglichkeiten und ermöglichen damit eine Reduzierung der Lehrerdominanz, Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit auf Schülerseite wird gefördert.
- Das Arbeiten mit CAS verlangt und fördert modulares Arbeiten auch im Mathematikunterricht. Gleichzeitig gewinnt die Dokumentation von Arbeitsschritten und Ergebnissen eine größere Bedeutung, damit wird der kommunikative Aspekt von Mathematik betont.

Veränderungen und Umgewichtungen/ Probleme

Die obige Beschreibung von Chancen erfolgte im Sinne eines vorhandenen Potentials. Die Realisierung verlangt noch die Beantwortung vieler offener Fragen und die Bewältigung einiger Probleme. Dies wird nicht zuletzt durch die Tatsache belegt, daß die in der Didaktik diskutierten Chancen der Veränderung in der schulischen Praxis bisher nur sehr vereinzelt aufgegriffen werden. Nach den Chancen sollen auch einige der Offenen Fragen und Probleme exemplarisch aufgezeigt werden.

- Da ist zunächst das Problem der bestehenden Curricula. Die oben angedeuteten Chancen bedingen sowohl inhaltliche Änderungen als auch eine Verschiebung der Anforderungen in Richtung komplexerer und anspruchvollerer Ziele (Modellieren, Anwenden, Interpretieren und Bewerten an Stelle der schematischen Ausführung von Algorithmen). Die Auswirkungen solcher Veränderungen sind nicht deduzierbar, sie müssen wegen der komplexen Zusammenhänge in der Entwicklung beobachtet und und zu einem Regelkreis geeigneter Reaktionen führen. Erste Voraussetzungen hierzu werden durch die Erweiterung von Freiräumen in den Rahmenplänen erfreulicherweise eingeleitet. Die Veränderung von Lehrbüchern und der Leistungsfeststellungen und Prüfungen (Innovationshemmung durch Zentralabitur!) muß folgen.
- Als nächstes müssen Lehrerinnen und Lehrer ins Blickfeld geraten. Diese müssen ihren Unterricht ja mit den neuen Werkzeugen konzipieren und durchführen, sind hierzu aber weder von den Fähigkeiten noch von den Einstellungen her ausgebildet. Es bedarf also wirksamer Maßnahmen in der Lehrerausbildung und vor allem der Fortbildung. „Wirksam" bezieht sich in diesem Zusammenhang auch auf die Form und „Philosohie" von Lehrerfortbildung. Eigenständiges und selbstverantwortliches Lernen kann nur von Lehrerinnen und Lehrern initiiert werden, die solches selbst erfahren haben. Insbesondere bzgl. der weniger lehrerzentrierten Interaktions- und offenen Lernformen besteht im Mathematikunterricht ein großer Erfahrungsbedarf.
- Wenig erforscht ist noch die Begriffsentwicklung beim Lernenden unter Verwendung von CAS. Klar ist, daß ein bestimmter Anteil von „händischer" Erfahrung für die sinnvolle Nutzung von CAS unerläßlich ist, über den Umfang derselben und über methodische Optimierung weiß man noch wenig. In der Didaktik wird dies u.a. unter dem Begriffspaar „white box - black box" diskutiert. Ebenso unbeantwortet ist noch die Frage „Wieviel Einblick müssen Schülerinnen und Schüler (und auch Lehrerinnen und Lehrer) in den internen Aufbau und die Funktion von Hard- und Software haben?" Dies greift über den Mathematikunterricht hinaus auf das allgemeine Problem der informationstechnischen Grundbildung.
- Für die Praxis von entscheidender Bedeutung sind schließlich auch die äußeren Bedingungen. Da die interaktive und eigentätige Nutzung der CAS durch die Schülerinnen und Schüler als Grundvoraussetzung zur Wahrung der Chancen unbestritten ist, ist die Ausstattung von Computerlabors und deren Verfügbarkeit für alle Klassen von größter Bedeutung. Auch die gegenwärtig sehr hohen Klassenfrequenzen und die hohe Unterrichtsbelastung von Lehrerinnen und Lehren im engen Stundentakt wirken sich kontraproduktiv auf die Realisierung der wünschenswerten Veränderungen aus.

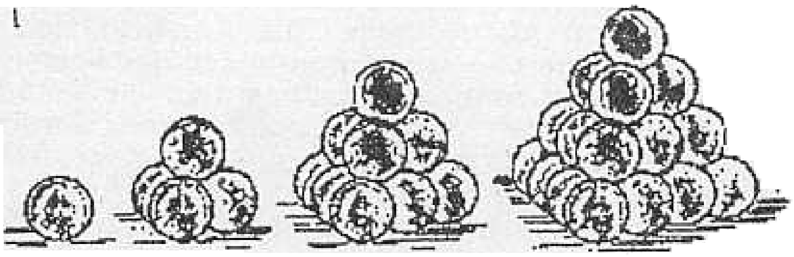
Zum Abschluß skizzieren wir noch ein Unterrichtsbeispiel mit dem Einsatz von DERIVE, an dem einige der oben diskutierten Möglichkeiten exemplarisch verdeutlicht werden können. Leider gestattet die schriftliche Darstellung nur in Ansätzen die Wiedergabe der wichtigen Prozesse des Experimentierens, Entdeckens und Erkennens.

Die Tennisballpyramide

Das Problem

Tennisbälle werden in der Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet, so daß sich darauf eine Pyramide aufbauen läßt. Erste *Experimente* verdeutlichen den Aufbau der Pyramiden und die schnell wachsende Anzahl von benötigten Tennisbällen

Abb. 1



Mit einer "Grundkante" von 2 Tennisbällen benötigt man insgesamt 4 Bälle, mit einer "Grundkante" von 3 Bällen bereits 10, mit einer Grundkante von 4 Bällen 20 usw.

Das Problem ist nun gestellt:

Wieviel Tennisbälle benötigt man für eine Pyramide mit einer Grundkante von 20 (50, n) Bällen?

Experimentieren und Zählen

Die Ergebnisse des Experimentierens halten wir übersichtlich in einer Tabelle fest:

Anzahl der Bälle für Grundkante n	Gesamtzahl der Bälle für Pyramide f(n)
1	1
2	4
3	10
4	20
5	35

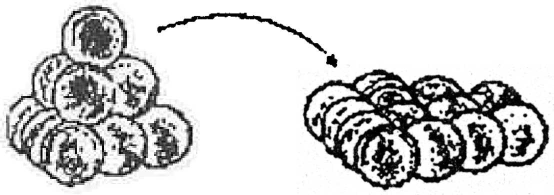
Die Zahl der Bälle wächst von Stufe zu Stufe offenbar immer schneller. Eine Gesetzmäßigkeit ist auf Anhieb nicht zu erkennen.

Strategien müssen her

Experimentieren und Denken führt zu verschiedenen Ansätzen

Strategie A

Jede Pyramide entsteht aus der vorhergehenden, indem man diese auf ein neues Grunddreieck aufsetzt.



Mathematiker drücken dies mit einer „Rekursionsformel" aus

$$f(n) = f(n-1) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

Strategie B

Wir entwickeln die Strategie zunächst für die Stufe 4:
In den Dreiecken der verschiedenen vier Ebenen benötigen wir jeweils eine bestimmte Anzahl von Bällen:

1.Ebene 4 + 3 + 2 + 1
2.Ebene 3 + 2 + 1
3.Ebene 2 + 1
4.Ebene 1

Damit ergibt sich insgesamt

$$g(4) = 1*4 + 2*3 + 3*2 + 4*1$$

Für die Stufe 5 enthalten wir entsprechend

1.Ebene 5 + 4 + 3 + 2 + 1
2.Ebene 4 + 3 + 2 + 1
3.Ebene 3 + 2 + 1
4.Ebene 2 + 1
5.Ebene 1

Damit ergibt sich insgesamt

$$g(5) = 1*5 + 2*4 + 3*3 + 4*2 + 5*1$$

Die Verallgemeinerung für die n-te Stufe führt zu der Formel:

$$g(n) = 1*n + 2*(n-1) + 3*(n-2) + \ldots (n-1)*2 + n*1$$

Strategie C

In einer Tabelle tragen wir zu jeder Stufe i die Anzahl T(i) der Bälle im untersten Dreieck der Pyramide (Basisdreieck) und die Gesamtanzahl P(i) der Bälle in der Pyramide auf.

Stufe i	Anzahl der Bälle im Basis dreieck T(i)	Anzahl der Bälle in der Pyramide P(i)
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56

Bei genauem Hinsehen fällt uns einiges auf:

1. Der Zuwachs der Bälle im Basisdreieck entspricht jeweils gerade der Stufenzahl i, d.h. T(2) = 3 = 1+2, T(3) = 6 =3+3 , T(4) = 10 = 6+4 usw. Dies führt zur Rekursionsformel

$$T(i) = T(i-1) + i$$

2. Der Zuwachs der Bälle in der Pyramide entspricht jeweils der Anzahl der Bälle im Basisdreieck. Dies entdeckten wir ja bereits bei Strategie A. Also

$$P(i) = P(i-1 \;\; + T(i)$$

Umsetzung der Strategien mit DERIVE:

```
1:  "Tennisballpyramide"

2:  "Strategie A"
                                      n
3:  F(n) := IF[n = 1, 1, F(n - 1) +   Σ   k]
                                     k=1
4:  VECTOR([n, F(n)], n, 1, 5)

     ┌ 1   1 ┐
     │ 2   4 │
5:   │ 3  10 │
     │ 4  20 │
     └ 5  35 ┘

6:  F(50)

7:  22100

8:  "Strategie B"
              n
9:  G(n) :=   Σ   i (n - i + 1)
             i=1
10: VECTOR([n, G(n)], n, 1, 6)

     ┌ 1   1 ┐
     │ 2   4 │
11:  │ 3  10 │
     │ 4  20 │
     │ 5  35 │
     └ 6  56 ┘

12: G(100)

13: 171700

14: "Strategie C"

15: T(i) := IF(i = 1, 1, T(i - 1) + i)

16: P(i) := IF(i = 1, 1, P(i - 1) + T(i))

17: VECTOR([i, T(i)], i, 1, 10)

     ┌  1   1 ┐
     │  2   3 │
     │  3   6 │
     │  4  10 │
18:  │  5  15 │
     │  6  21 │
     │  7  28 │
     │  8  36 │
     │  9  45 │
     └ 10  55 ┘

19: VECTOR([i, P(i)], i, 1, 10)

     ┌  1    1 ┐
     │  2    4 │
     │  3   10 │
     │  4   20 │
20:  │  5   35 │
     │  6   56 │
     │  7   84 │
     │  8  120 │
     │  9  165 │
     └ 10  220 ┘

21: P(50)

22: 22100
```

Wege zur direkten Formel

Die aus den Strategien gewonnenen Rekursionsformeln liefern uns die praktische Lösung unseres Problems. Für die Denker und Knobelexperten stellt sich allerdings noch die herausfordernde Aufgabe, eine direkte (explizite) Formel zu finden, die einem für jedes n die Anzahl der Bälle in der Pyramide durch direktes Einsetzen liefert. (Ähnlich wie Gauß dies für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gefunden hat).

Auch hierfür gibt es sicher viele verschiedene Ideen und Wege. Einige davon wollen wir etwas weiter verfolgen.

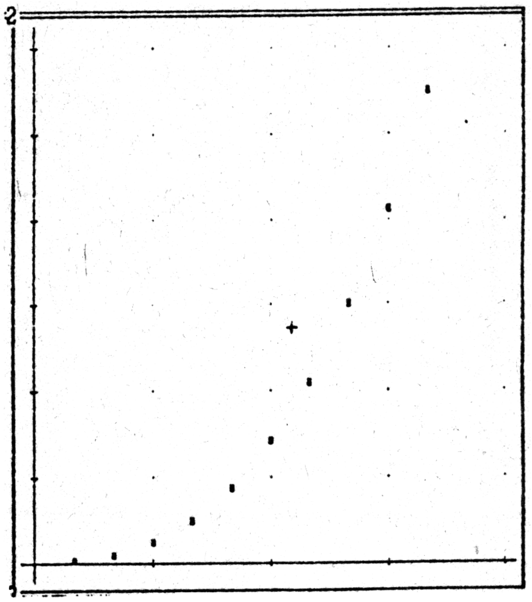
Funktionen und Graphen

Jeder Stufe n soll die Anzahl f(n) der Tennisbälle zugeordnet werden. Eine solche Zuordnung n -> f(n) ist eine Funktion.

Leider kennen wir den Funktionsterm f(n) nicht.

27: "Wege zur Formel"

28: "Plotten"



Aus den Tabellen kennen wir allerdings eine Reihe von Paaren (n|f(n)), die wir im Koordinatensystem als „Punkte" darstellen können. Vielleicht führt uns der Graph dann auch zu einem Funktionsterm?

Wir plotten eine der vorher erstellten Tabellen.

Die Punkte liegen auf einer Kurve, die eine Parabel sein könnte.

Es gilt, einen passenden Funktionsterm f(x) zu finden.

1.Versuch: $f(x) = ax^2+bx+c$

Durch Einsetzen der Punkte (0|0), (1|1) und (2|4) erhalten wir $f(x) = x^2$.
Schon das Einsetzen des nächsten Punktes (3|10) fuhrt zum Verwerfen dieses Ansatzes.

2. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Einsetzen der Tabellenwerte (1|1), (2|4) und (3|10) führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 8a + 4b + 2c &= 4 \\ 27a + 9b + 3c &= 10 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems berechnen wir mit DERIVE. Hierzu wählen wir zwei verschiedene Möglichkeiten, die wir je nach den vorhandenen Vorkenntnissen einsetzen können.

Am einfachsten ist es, wenn wir das Gleichungssystem in der Matrixschreibweise $A \bullet x = b$ darstellen. Unsere Lösung können wir dann mit den Matrixoperationen A^{-1} und $A^{-1} * B$ direkt berechnen.

Etwas aufwendiger ist es, wenn wir das Gleichungssystem nach dem Gaußschen Dreiecksverfahren lösen.

29: "Ansatz Parabel 3.Grades"

30: "GR(x)=ax^3+bx^2+cx"

31: "inhomogenes (3-3)-Gleichungssyste

32: "Lösen mit Gauss-Alg."

33: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

34: [1, 4, 10]

35: $\text{ROW\_REDUCE}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}, [1, 4, 10\right.$

36: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

41: "Lösen mit Matrix"

42: $\dfrac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}}$

43: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

44: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot [1, 4, 10]$

45: $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert uns das Polynom 3.Grades

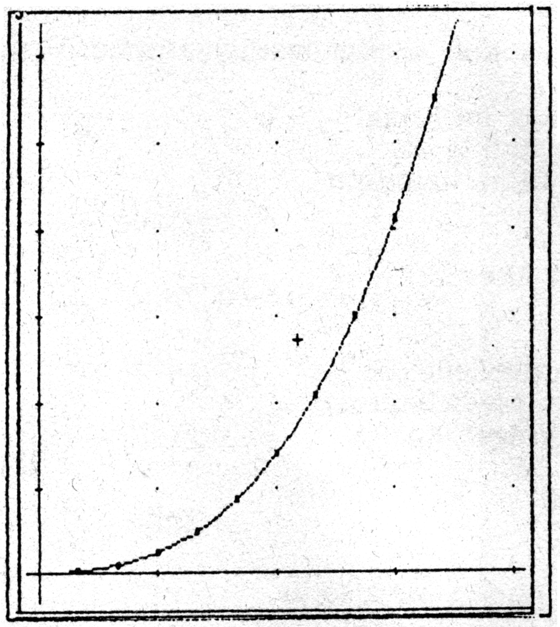
37: $GR(x) := \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$

Dies wird nun überprüft, indem wir nachsehen, ob unsere „Punkte“ (n|f(n)) der Tennisballpyramide auf dem Graph von f liegen.

38: GR(50)

39: 22100

40: "Plotten in Streudiagramm"



Der Umweg über Streudiagramm, Funktion und Graph zum Funktionsterm hat uns schließlich zur gesuchten Formel gebracht.

Die Anzahl der Bälle für eine Pyramide der n-ten Stufe läßt sich nach der Formel

$$f(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n \quad \text{oder} \quad f(n) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

berechnen.

Eine überraschende Entdeckung am Pascaleschen Dreieck

Was hat das Pascalesche Dreieck mit unserer Tennisballpyramide zu tun? Ein genaues Hinschauen offenbart Erstaunliches!

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

In der eingezeichneten Diagonalen stehen offensichtlich gerade unsere Tennisballpyramidenzahlen f(n). Da wir das Pascalesche Dreieck beliebig weit schrittweise aufbauen können, erhalten wir somit auch unsere Zahlen für beliebig großes n. Allerdings erhält das Dreieck für f(50) schon erstaunliche Ausmaße.

Auch hier hilft wieder mathematisches Grundwissen.

Die Zahlen im Pascal-Dreieck sind ja die Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k}$ („n über k"),

wobei n die Zeile des Dreiecks bezeichnet und k die „schräge" Spalte.

Beispiel:

$\binom{4}{1} = 4$ finden wir also in der 4.Zeile und in der 1.Schrägspalte.

0.Spalte, 1.Spalte, 2.Spalte, 3.Spalte, 4.Spalte

0.Zeile — $\binom{0}{0}$

1.Zeile — $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

2.Zeile — $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

3.Zeile — $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

4.Zeile — $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$

$\binom{6}{3}$

Für die Zahlen unserer Tennisballpyramide finden wir dann die Zuordnung:

$$f(n) = \binom{n+2}{n-1}$$

Wir können diese Formel mit Binomialkoeffizient nun auch leicht in die vorher gewonnene Formel überführen.

Dazu benutzen wir die Definition der Binomialkoeffizienten in DERIVE und erhalten

49: "Pascalesches Dreieck"

50: COMB(n + 2, n - 1)

51: $\dfrac{n\ (n + 1)\ (n + 2)}{6}$

52: "Expand"

53: $\dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$

Von der Problemlösung zum Beweis

Über ganz verschiedene Wege sind wir zu einer Formel für f(n) gelangt. Von deren Richtigkeit sind wir überzeugt, wir konnten sie auf vielfältige Beweise bestätigen. Strengsten mathematischen Ansprüchen genügt dies allerdings nicht. Hier wird ein Beweis verlangt. In diesem Fall bietet sich das Beweisverfahren der vollständigen Induktion an. Dies wird an dieser Stelle nicht ausgeführt, ein genetisches Vorgehen ist in [4] ausführlich beschrieben.

Ergänzungen

Wir wollen zum Abschluß noch eine weitere Möglichkeit anbieten, die mit DERIVE leicht zu realisieren ist. Mit der Funktion FIT läßt sich ein Ausgleichspolynom zu vorgegebenen Punkten berechnen. Dies geschieht nach der Methode der Gausschen Fehlerquadrate. Falls nun die Punkte exakt auf einem Polynom 3. Grades liegen, so erhalten wir eben dieses Polynom.

"Ausgleichskurve"

$$\mathrm{FIT}\left(\left[x,\ a\,x^3+b\,x^2+c\,x\right],\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\\ 3 & 10\\ 4 & 20\\ 5 & 35\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}$$

Eine kritische Beobachtung soll nicht unterschlagen werden. Wir haben interessante heuristische Zugänge zur Lösung des Tennisballproblems beschrieben, bei denen viel nachgedacht werden durfte und verschiedene interessante mathematische Verfahren zum Einsatz kamen. Der Einsatz von DERIVE kanndiese Prozesse unterstützen, insbesondere Realisieren der iterativen Ansätze und durch Experimentieren beim Suchen einer Formel. Das Werkzeug DERIVE ist aber so mächtig, daß diese Anstrengungen auch umgangen werden können. Die in Strategie B gewonnene Summenformel liefert mit SIMPLIFY direkt den gesuchten Term!. Ebenso kann man sich überlegen, daß die Pyramide ja aus Dreiecken aufgebaut ist, deren Anzahl sich jeweils nach der Gauss-Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen berechnen läßt. Auch die daraus entstehende Summe h(n) liefert mit SIMPLIFY direkt die Formel.

23: "Strategie D"

24: $H(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,(k+1)}{2}$

"Formeln für Strategien"

"Strategie A und C ohne Erfolg"

"Strategie B"

G(n)

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$$

"Strategie D"

H(n)

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$$

Auch damit muß man im Unterricht umgehen lernen, manche Motivationen werden anders verlaufen. Mit dem Apell an die pädagogische Phantasie sollen die Konsequenzen offen bleiben.

Anmerkungen

1) Seit 1985 beschäftigt sich eine Arbeitsgruppe im Auftrag des Kultusministeriums Rheinland-Pfalz mit dem Einsatz des Computers als Werkzeug im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. In ersten Handreichungen [1] haben wir die Einsatzbereiche des Computers im Mathematikunterricht ausführlich beschrieben und diese nach den folgenden Aspekten gegliedert:

- Der Computer als programmierbare Rechenmaschine, mit dem sich mathematische Algorithmen mit hoher Geschwindigkeit und großer Zuverlässigkeit ausführen lassen
- Der Computer als Werkzeug zur Realisierung rekursiver und iterativer Ansätze
- Der Computer als „grafisches Werkzeug" zur Darstellung von geometrischen Abbildungen, Diagrammen und Funktionsgraphen
- Der Computer als Werkzeug zur Simulation
- Der Computer als Werkzeug zur symbolischen Manipulation

Die Materialien und Unterrichtsbeispiele in diesen beiden Handreichungen stützen sich im wesentlichen auf „kurze Programme" oder wenige selbstentwickelte Fertigprogramme. Eine weitere Handreichung [2] widmete sich dem Problem der Leistungsbeurteilung in einem Unterricht mit Computereinsatz. Seit drei Jahren beschäftigen wir uns im Schwerpunkt mit dem Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht, die ersten Materialien [3] sind 1995 veröffentlicht.

Literatur:

[1] Kultusministerium Rheinland-Pfalz (1988): Handreichung zum Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach in der Oberstufe des Gymnasiums (Mainzer Studienstufe), Der Computer als Werkzeug im Mathematikunterricht, Teile 1 und 2

[2] Ministerium für Bildung und Kultur Rheinland-Pfalz (1992): Handreichung zum Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach in der Oberstufe des Gymnasiums (Mainzer Studienstufe), Der Computer als Werkzeug im Mathematikunterricht, Teil 3

[3] Ministerium für Bildung,Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz, Landesmedienzentrum (1995): Materialien zum Mathematikunterricht mit Computer und DERIVE

[4] G. Schmidt (1990): Heuristische Strategien im Mathematikunterricht - Eine Unterrichtsskizze, in Finden,Erfinden,Lernen:zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt/Martin Glatfeld (Hrsg.), Frankfurt Main 1990