

WOLFRAM KOEPF

Workshop für Fortgeschrittene

Dies ist eine Kurzfassung meines Artikels *Graphische Darstellungen im Analysisunterricht* [5], der 1996 in der *Praxis der Mathematik* erscheinen wird und als Grundlage für meinen Workshop in Düsseldorf diente.

Viele Konzepte der Analysis haben eine graphische Interpretation, die sich allerdings im konkreten Fall naturgemäß nur unter großem Aufwand auf Papier bringen läßt.

Mit DERIVE können Konzepte der Analysis graphisch dargestellt werden. Dies kann wesentlich zum Verständnis der Unterrichtsinhalte beitragen.

1 Iteration und Fixpunkte

Jeder Schüler hat vermutlich schon folgende Situation erlebt: Man nehme einen Taschenrechner zur Hand und drücke ununterbrochen auf die COS-Taste. Man stellt dann fest, daß eine Zahlenkolonne berechnet wird, deren Ergebnis sich schließlich nicht mehr ändert.

Mit DERIVE kann man diese *Iteration* mit dem ITERATES-Befehl durchführen. Beim Aufruf von ITERATES(f, x, x_0, n) wird beginnend bei $x = x_0$ die Vorschrift $x_{k+1} = f(x_k)$ n -mal durchgeführt. Die Anwendung von `Simplify` auf ITERATES(COS(x), x , 0, 5) liefert also

$$[0, 1, \cos(1), \cos(\cos(1)), \cos(\cos(\cos(1))), \cos(\cos(\cos(\cos(1))))],$$

da mit `Simplify` immer exakte Rechnungen durchgeführt werden. Möchte man mit dezimalen Näherungswerten arbeiten, wodurch Konvergenz gegebenenfalls erst sichtbar wird, verwendet man `approx` und erhält

$$[0, 1, 0.540302, 0.857553, 0.654289, 0.79348].$$

Noch sieht man die Konvergenz nicht. Läßt man jedoch das vierte Argument von ITERATES weg, so wird die Iteration so lange durchgeführt, bis eine Zahl zum wiederholten Male als Iterationswert berechnet wird. Als Resultat von ITERATES(COS(x), x , 0) unter Verwendung von `approx` erhält man nun

$$[0, 1, 0.540302, 0.857553, \dots, 0.739085, 0.739084, 0.739085, 0.739084, 0.739085].$$

Man bedenke aber, daß `Simplify` hier in eine Endlosschleife gerät und nicht abbricht (warum?)!

Das Ergebnis von eben sieht so aus, als wäre das Verfahren zu spät abgebrochen worden. DERIVE arbeitet intern immer mit rationalen Näherungen. Wenden wir `Simplify` auf das eben berechnete Ergebnis an, erhalten wir¹

$$\left[0, 1, \frac{5396}{9987}, \frac{8362}{9751}, \dots, \frac{7838}{10605}, \frac{4943}{6688}, \frac{34111}{46153}, \frac{7770}{10513}, \frac{34111}{46153}\right],$$

¹Dieses Ergebnis ist möglicherweise versionsabhängig.

und man sieht, daß das letzte Resultat tatsächlich das erste ist, das bereits in der Iterationsliste vorkam.

Wir können auch schwierigere Iterationen durchführen, die man mit einem Taschenrechner nicht mehr so leicht nachvollziehen kann. Beispielsweise liefert die Approximation des Ausdrucks $\text{ITERATES}(\text{EXP}(-x), x, 0)$ die Liste

$[0, 1, 0.367879, 0.6922, \dots, 0.567143, 0.567143, 0.567143, 0.567143, 0.567143]$

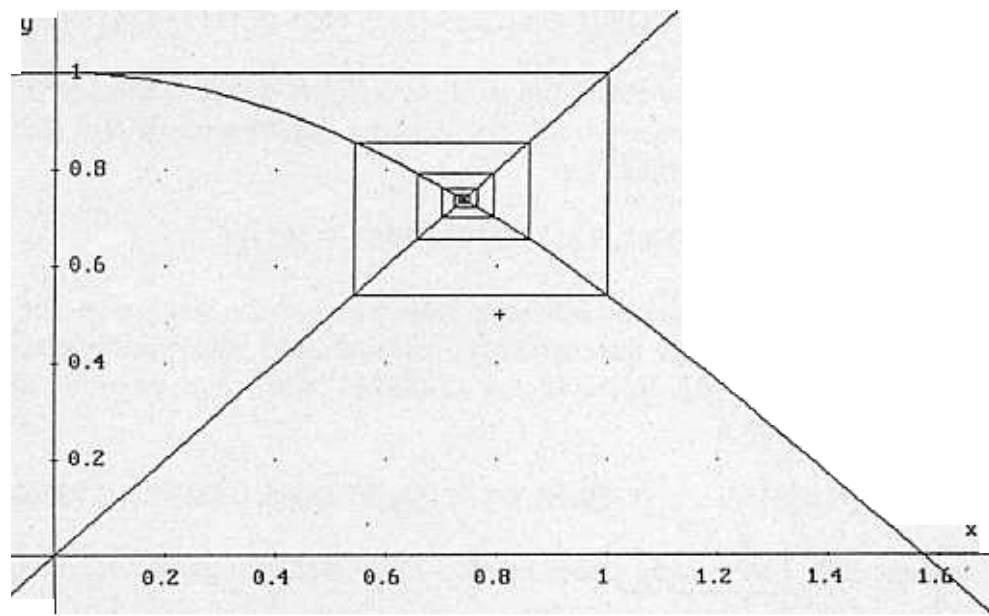
(mit welchen Tastenkombinationen könnte man diese Liste mit einem Taschenrechner erzeugen?), und $\text{ITERATES}(x + \sin(x), x, 1)$ generiert eine Approximation der Kreiszahl π

$[1, 1.84147, 2.80506, 3.13527, 3.14159, 3.14159]$.

Mit **Options Precision Digits** können wir im übrigen bei größerer Rechenzeit auch mit größerer Rechengenauigkeit arbeiten. Man verwende dann gegebenenfalls als Startwert eine bereits berechnete gute Näherung!

Die gezeigten Berechnungen lassen sich nun zwar auch ohne weiteres mit einem programmierbaren Taschenrechner durchführen, aber sowohl die Frage, warum beispielsweise das letzte Resultat eine Näherung von π ist, als auch die Frage, warum die Konvergenz bei diesem Beispiel so gut ist, bleibt im Dunkeln.

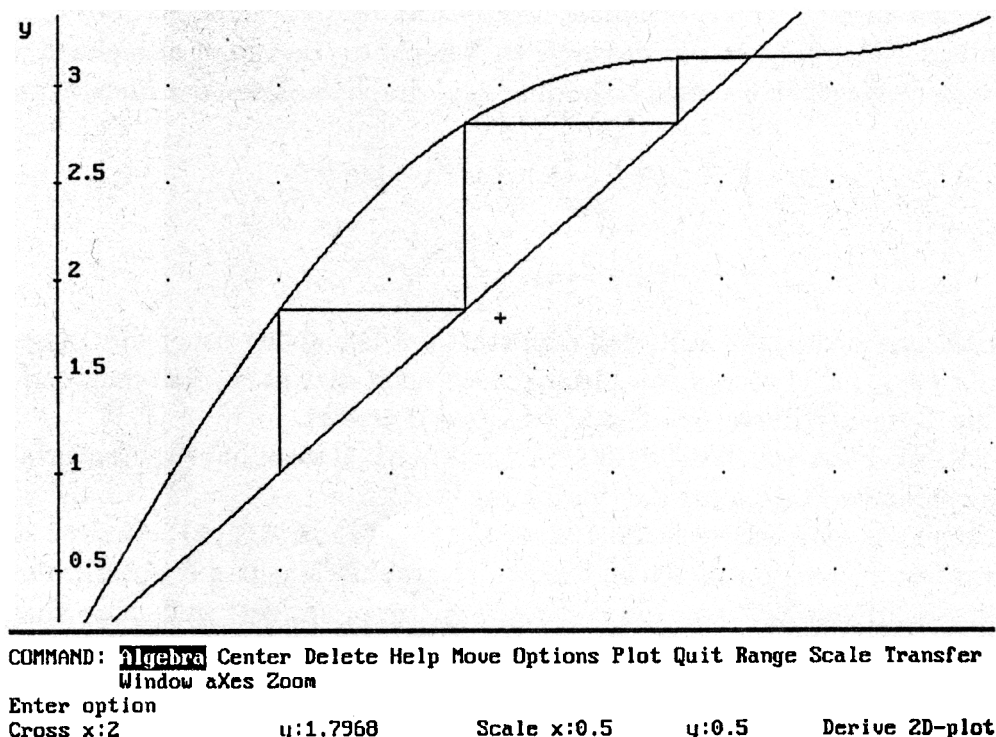
Hier hilft nun eine graphische Darstellung der Situation weiter, die wir mit DERIVE erstellen können [5], s. Abbildung 1.



COMMAND: **Algebra** Center Delete Help Move Options Plot Quit Range Scale Transfer
Window axes Zoom
Enter option
Cross x:0.8055 y:0.5 Scale x:0.2 y:0.2 Derive 2D-plot

Abbildung 1: Graphische Darstellung von $\text{FIXPUNKT_GRAPH}(\cos(x), x, 0)$

Die Berechnung von $\text{FIXPUNKT_GRAPH}(x + \sin(x), x, 1)$ resultiert in Abbildung 2

Abbildung 2: Graphische Darstellung von $\text{FIXPUNKT_GRAPH}(x+\sin(x), x, 1)$

Auf diese Weise steht dem Schüler die graphische Situation für jedes konkrete Beispiel in wenigen Sekunden zur Verfügung. Dies kann ganz wesentlich zum Verständnis der zugrundegelegten mathematischen Konzepte beitragen.

Dadurch ändert sich auch die Unterrichtsmethodik gewaltig: Während bisher graphische Darstellungen – beispielsweise bei der Kurvendiskussion – am Ende eines Rechenprozesses standen und dessen Ziel darstellten oder – wie bei der Iteration – nur in Lehrbüchern zu finden waren, können diese nun am Anfang des Lernprozesses stehen und auf einfache Weise auf viele konkreten Probleme angewandt werden. Was der Schüler auf den erzeugten Graphiken erkennt, kann dann versucht werden zu beweisen. Der Erkenntnisprozeß aber findet beim Schüler selber statt.

Unter Zuhilfenahme der erzeugten Bilder können unsere oben gestellten Fragen z. B. leicht beantwortet werden: Konvergiert das Iterationsverfahren, so konvergiert es offenbar gegen eine Lösung der Gleichung $x = f(x)$, also gegen einen Schnittpunkt des Graphen von f mit der ersten Winkelhalbierenden, und dies offenbar umso schneller, je flacher der Graph am Schnittpunkt ist. Die Funktion $f(x) = x + \sin x$ hat an der Stelle π eine horizontale Tangente, was offenbar optimal ist.

2 Das Newtonverfahren

Das Newtonverfahren baut letztlich auf der eben gewonnenen Erkenntnis auf. Es liefert ein Iterationsverfahren für die numerische Lösung der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

das fast immer die angesprochene optimale Eigenschaft besitzt. Newtons Idee besteht darin, eine Folge von Näherungswerten dadurch zu berechnen, daß man ausgehend von einer Näherung x_k eine (hoffentlich bessere) Näherung x_{k+1} durch Auflösen der *linearisierten* Hilfsgleichung

$$y = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) = 0$$

nach x , also

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1)$$

erhält. Linearisierung bedeutet somit, daß man statt der Gleichung von f die Tangentengleichung im Punkt $(x_k, f(x_k))$ verwendet. Geometrisch heißt dies dann, daß man den Graphen von f durch die Tangente durch den Punkt $(x_k, f(x_k))$ ersetzt.

Mit der DERIVE-Funktion `NEWTON_GRAPH(f, x, x0, n)` [5] steht das Newtonverfahren mit- samt seiner graphischen Bedeutung zur Verfügung.

Approximieren wir beispielsweise `NEWTON_GRAPH(COS(x), x, 5/2, 2)`, erhalten wir Abbildung 3. Die rasante Konvergenzgeschwindigkeit ist graphisch sehr gut zu erkennen. Schon nach 2 Iterationsschritten hat man die Nullstelle gut approximiert und nach einem weiteren Iterationsschritt kann der iterierte Wert mit dem Auge von der Nullstelle nicht mehr unterschieden werden.

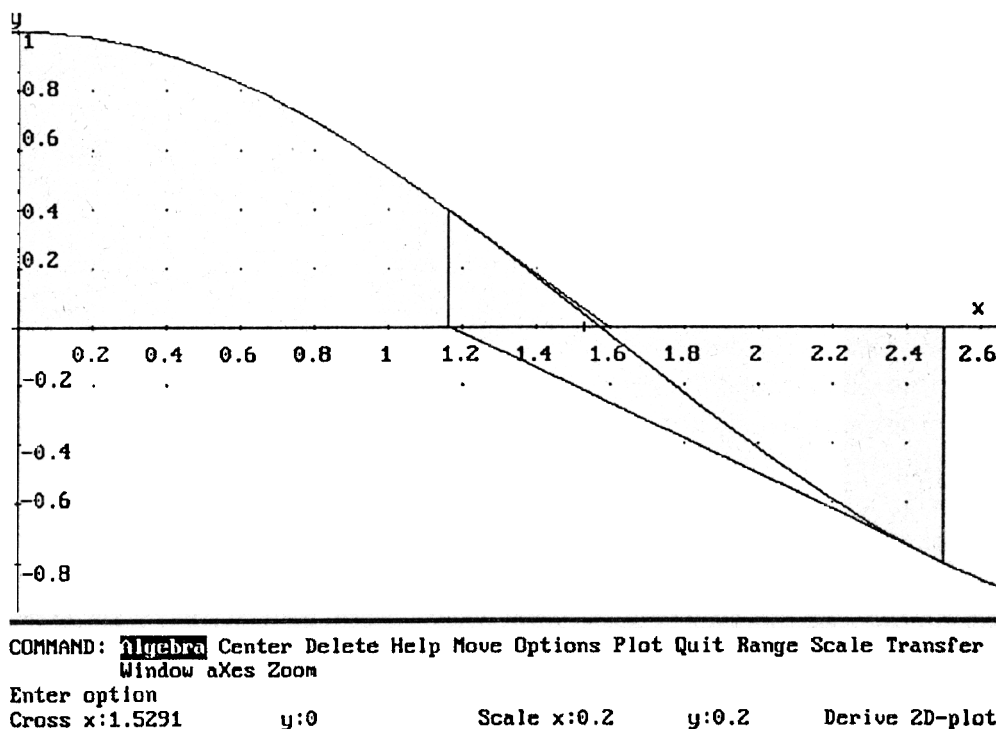


Abbildung 3: Graphische Darstellung von `NEWTON_GRAPH(COS(x), x, 5/2, 2)`

3 Divergente und chaotische Iteration

Aber das Newtonverfahren kann auch divergieren. Dies sieht man schön an der Beispielfunktion $f(x) = x^{1/3}$, deren Nullstelle $x_0 = 0$ man mit dem Newtonverfahren wegen $f'(x_0) = \infty$

nicht erzeugen kann. Die graphische Darstellung von `NEWTON_GRAPH(x^(1/3),x,0.1,5)` (man verwende `Manage Branch Real`! Warum?) ergibt Abbildung 4 und verdeutlicht diesen Sachverhalt.

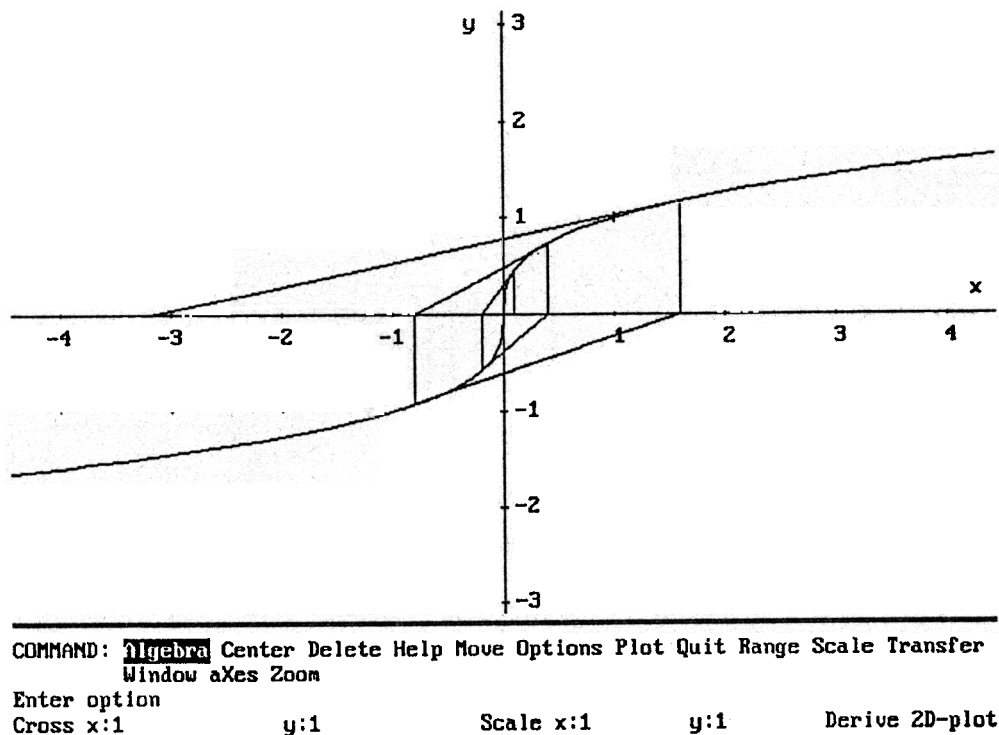


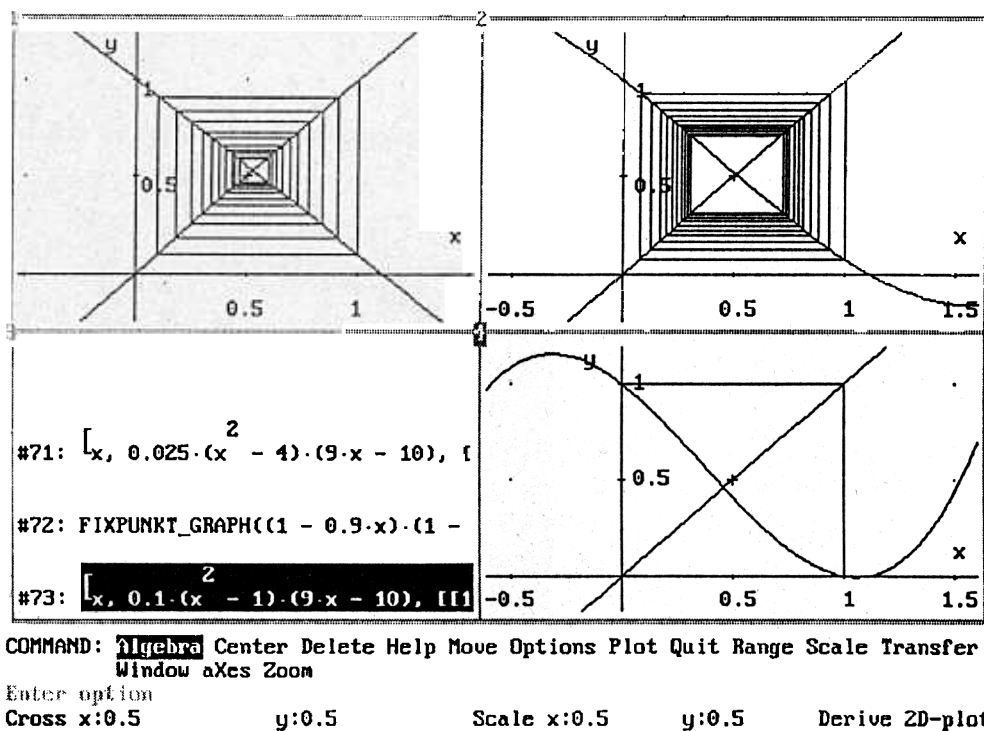
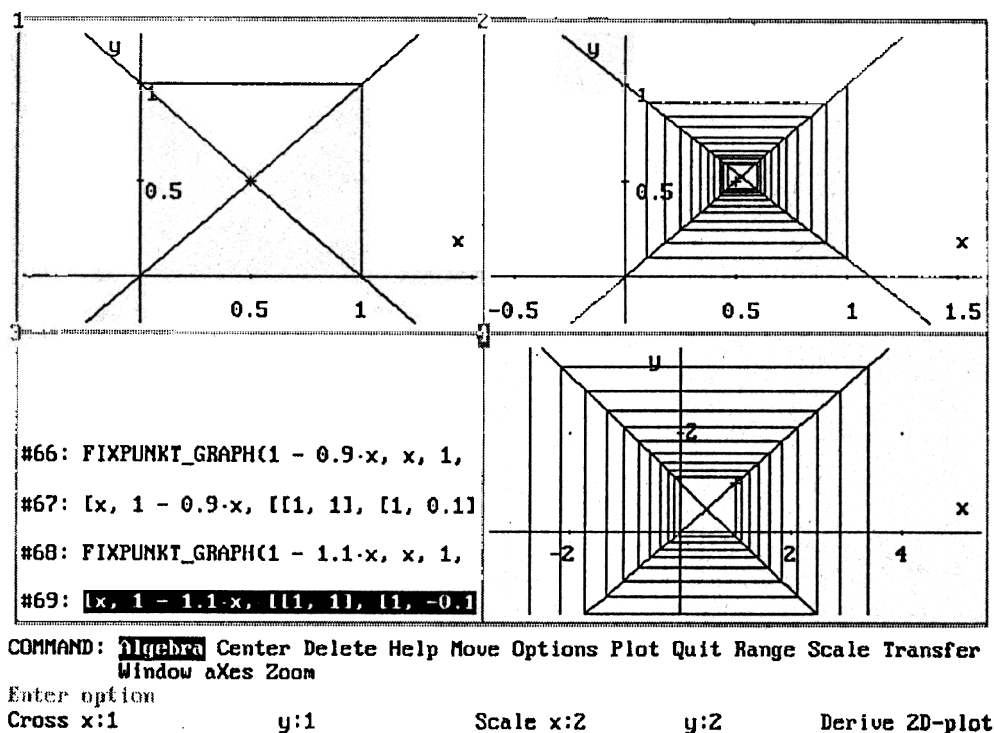
Abbildung 4: Graphische Darstellung von `NEWTON_GRAPH(x1/3,x,0.1,5)`.

Nachdem die Schüler die Divergenz aus der Graphik abgelesen haben, ist es ein Leichtes für sie, die Newtonfolge (1)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^{1/3}}{\frac{1}{3}x_k^{-2/3}} = -2x_k$$

zu berechnen. Die Berechnung zeigt, daß sich der Abstand zur Nullstelle $x_0 = 0$ bei jedem Iterationsschritt verdoppelt. Ein ähnliches Beispiel kann herangezogen werden, um zu zeigen, daß das Newtonverfahren nicht immer schnell konvergieren muß. Man betrachte $f(x) = x^{2/3}$, wo sich $x_{k+1} = -x_k/2$ ergibt.

Erst recht konvergiert das Fixpunktverfahren nicht immer. Unter welchen Voraussetzungen aber liegt Konvergenz vor? Wir hatten bereits erkannt, daß es besonders gut konvergiert, wenn die Funktion f an der betreffenden Stelle x_0 eine horizontale Tangente besitzt, also $f'(x_0) = 0$ gilt. Man sieht nun auch leicht graphisch ein, daß im Fall $|f'(x_0)| < 1$ (lokal) immer Konvergenz vorliegt, während wir im Fall $|f'(x_0)| > 1$ Divergenz haben. Besonders interessant sind also Fälle, bei denen entweder $|f'(x_0)| = 1$ oder jedenfalls $|f'(x_0)| \approx 1$ ist. Die Betrachtung solcher Situationen führt schnell zu sehr interessanten und überraschenden Iterationen.



Wählen wir zunächst $f(x) = 1 - x$, so liegt ein Zyklus vor, s. Abbildung 5 oben links. Hier ist $x_0 = 1/2$ und $f'(x_0) = 1$. Geringfügige Änderung an $f'(x_0)$ liefert die (langsam) konvergente Situation von Abbildung 5 oben rechts sowie die divergente Situation aus Abbildung 5 unten rechts. Da DERIVE diese Bilder streckensegmentweise aufbaut, sieht man die Iteration noch eindrucksvoller als auf der Abbildung, da die Zeit beim Bildaufbau die Funktion der Variablen k übernimmt.

Ein anderes Experiment sehen wir in Abbildung 6. Ändert man die lineare Iterationsfunktion $f(x) = 1 - 0.9x$ zu der (in der Umgebung von $x_0 = 1/2$ geringfügig) nichtlinearen Iterationsfunktion $f(x) = (1 - 0.9x)(1 - x^2/4)$, so liegt weiter Konvergenz vor, die sich aber verlangsamt. Die stärkere Veränderung von f zu $f(x) = (1 - 0.9x)(1 - x^2)$ führt schließlich dazu, daß die Konvergenz des Verfahrens ausbleibt und sich wieder ein Zyklus bildet. Es fällt dem Schüler nicht schwer und es macht Spaß, sich Zwischenzustände anzusehen sowie die Situation für $f(x) = (1 - 0.9x)(1 - ax^2)$ mit $a > 1$ zu untersuchen.

Ein weiteres interessantes Beispiel betrifft die Tangensfunktion. Da diese jeden reellen Wert unendlich oft annimmt, gibt es hier ein recht chaotisches Verhalten. Die graphische Darstellung von `FIXPUNKT_GRAPH(TAN(x), x, 1, 20)` ist in Abbildung 7 dargestellt.

In Abbildung 8 habe ich das Newtonverfahren für $\sin x$ für die 3 nahe beieinanderliegenden Anfangswerte 1.3, 1.4 und 1.5 dargestellt, das ebenfalls chaotisches Verhalten zeigt.

In [5] wird ferner eine graphische Darstellung des Bisektionsverfahrens betrachtet, welches ja im allgemeinen viel langsamer konvergiert als das Newtonverfahren. Die unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeit kann damit vom Schüler selbst an vielen Beispielen praktisch erfahren werden.

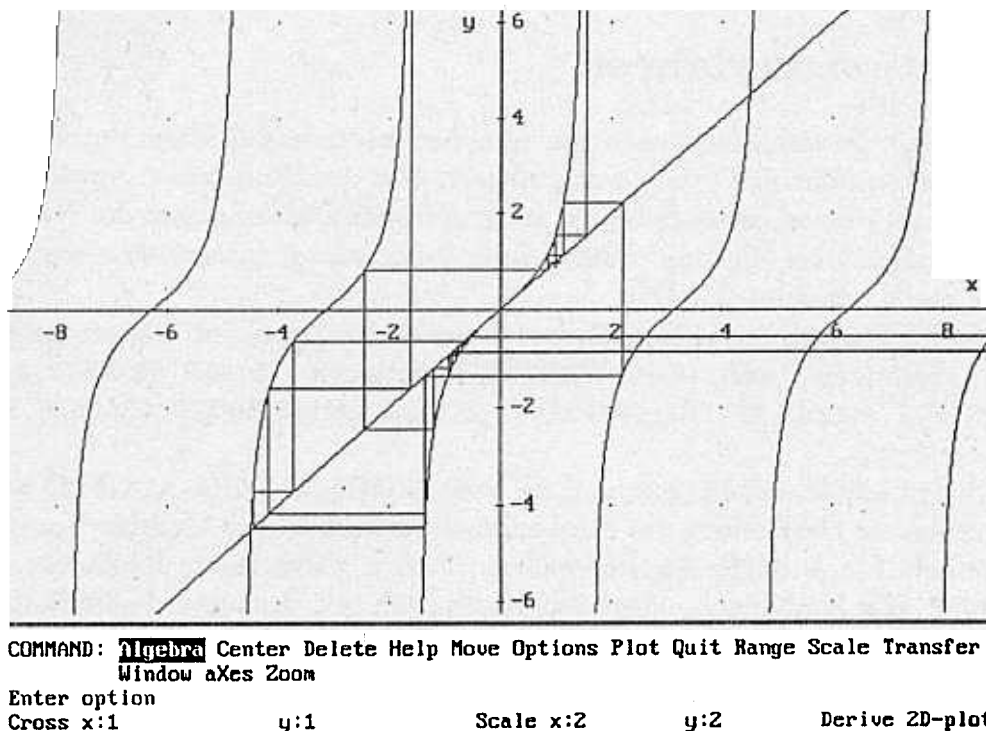


Abbildung 7: Graphische Darstellung von `FIXPUNKT_GRAPH(TAN(x), x, 1, 20)`

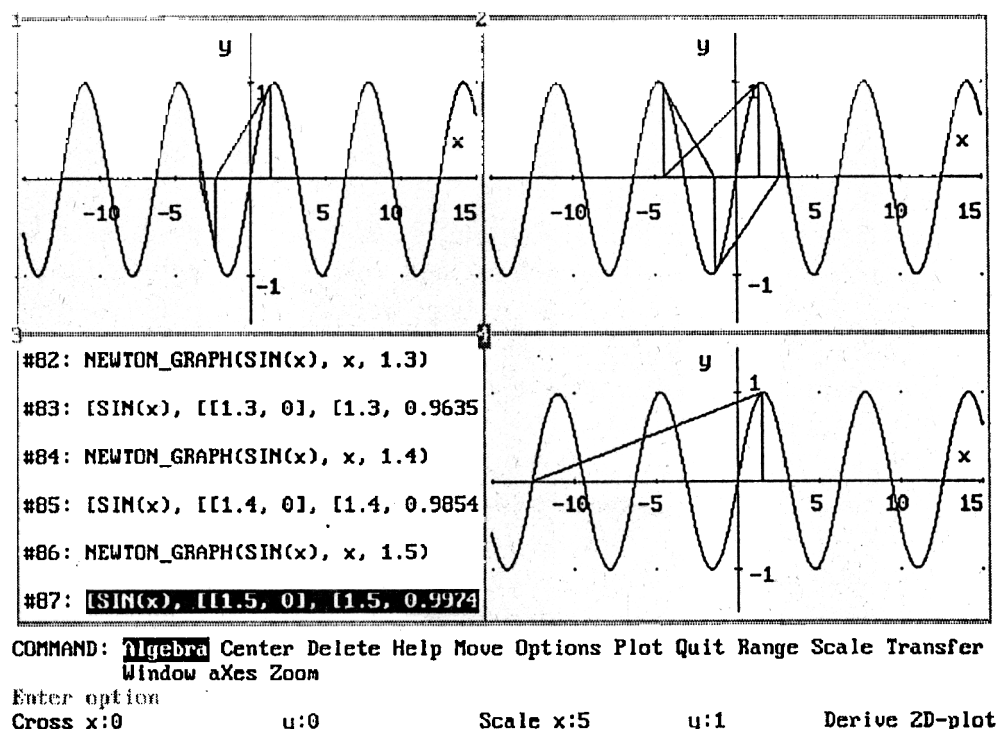


Abbildung 8: Chaotisches Newtonverfahren

4 Integrationsverfahren

Bei der numerischen Integration werden von Graphen berandete Flächen durch Rechtecke, Trapeze oder Kurven höherer Ordnung angenähert. Um die Güte dieser Approximationen besser beurteilen zu können, ist es hilfreich, auf graphische Darstellungen der Näherungsgebiete zurückzugreifen. Über die Implementierung verschiedener Integrationstechniken habe ich an anderer Stelle berichtet ([1]–[2]).

Zur graphischen Darstellung arithmetischer Riemann-Summen, der Trapezregel sowie der Simpsonregel benutzen wir die DERIVE-Funktionen LINKS_GRAPH(f, x, a, b, n), RECHTS_GRAPH(f, x, a, b, n), TRAPEZ_GRAPH(f, x, a, b, n) sowie SIMPSON_GRAPH(f, x, a, b, n), s. [5].

Die Funktionen LINKS_GRAPH(f, x, a, b, n) bzw. RECHTS_GRAPH(f, x, a, b, n) generieren hierbei eine graphische Darstellung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Intervall $[a, b]$ durch Approximation durch n gleich breite Rechtecke, während TRAPEZ_GRAPH(f, x, a, b, n) eine analoge Approximation mit Trapezen darstellt. Die Funktion SIMPSON_GRAPH(f, x, a, b, n) erzeugt eine graphische Darstellung der Approximation des Flächeninhalts durch stückweise quadratische Funktionen in jedem der n Teilintervalle gemäß der Simpsonregel.

In Abbildung 9 wird das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx,$$

d. h., der Flächeninhalt, der vom Graphen der Sinusfunktion, der x -Achse und den vertikalen Geraden $x = 0$ und $x = \pi/2$ berandet ist, durch Rechteckapproximationen von links und rechts sowie durch eine Trapezapproximation angenähert. Man sieht sehr schön, daß aufgrund der Monotonie der Sinusfunktion in dem betrachteten Intervall die linken Rechtecke allesamt zu klein und die rechten Rechtecke allesamt zu groß sind, so daß der Integralwert die linken bzw. rechten Riemannsummen als untere bzw. obere Schranken besitzt.

Es macht auch keine Mühe, sich Approximationen für größere Werte von n zu beschaffen, s. Abbildung 10.

Ferner sieht man, daß die Qualität der Trapezapproximation bedeutend besser ist, daß sie aber generell einen zu kleinen Wert liefert (welche Eigenschaft von f ist hierfür verantwortlich?). Die Simpsonapproximation ist bei diesem Beispiel so gut, daß man die Approximationsfunktion schon bei $n = 5$ nicht mehr von f unterscheiden kann, so daß wir auf eine Darstellung verzichten können, vgl. [1].

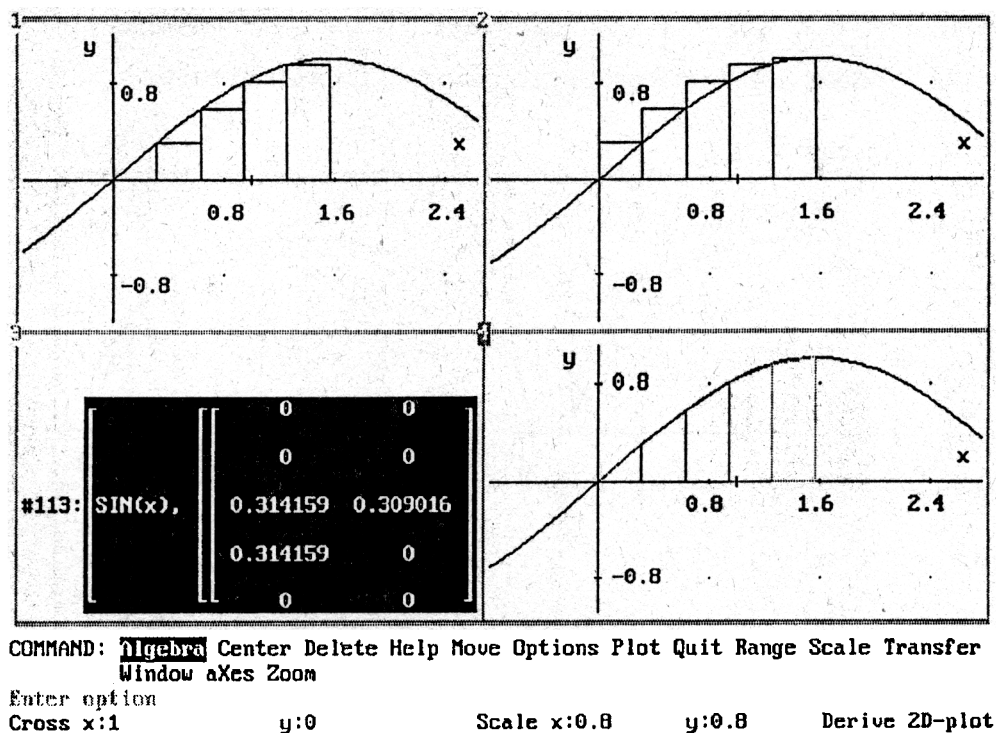
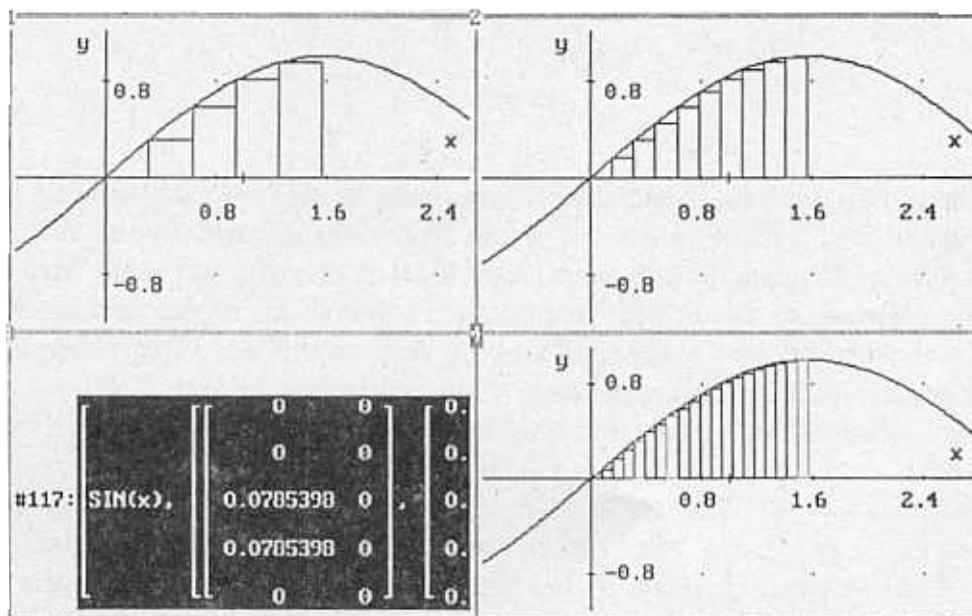


Abbildung 9: Linke und rechte Rechteck- und Trapezapproximation



COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Range Scale Transfer Window axes Zoom

Enter option

Cross x:1

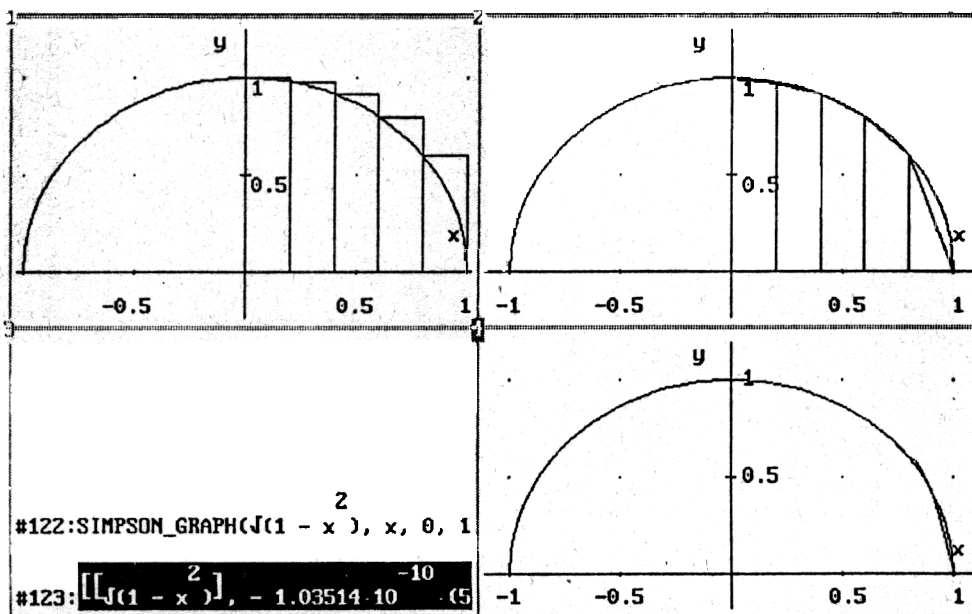
y:0

Scale x:0.8

y:0.8

Derive 2D-plot

Abbildung 10: Rechteckapproximationen für verschiedene n



COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Range Scale Transfer Window axes Zoom

Enter option

Cross x:0

y:0.5

Scale x:0.5

y:0.5

Derive 2D-plot

Abbildung 11: Approximationen zur Flächenberechnung des Kreises

Dies ist natürlich nicht bei allen Funktionen so. In welchen Fällen sind die gegebene Approximationen besonders schlecht? Dies sieht man schön bei der Betrachtung des Integrals

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx ,$$

s. Abbildung 11. Besonders schlecht geeignet zur numerischen Integration sind offenbar Stellen, an denen die Steigung des Integranden f besonders groß wird, und am schlimmsten ist die Situation, wenn wie in unserem Beispiel f eine vertikale Tangente besitzt. Nicht einmal das Simpsonverfahren kann einen solchen Kurvenverlauf korrekt modellieren, da ja quadratische Funktionen bekanntlich niemals vertikale Tangenten haben. In solchen Fällen müssen Programme wie DERIVE zur numerischen Approximation gegebenenfalls andere Verfahren anwenden.

5 Schlußbemerkung

Ich bin der Meinung, daß graphische Vorstellungen für den Analysis-Unterricht und für den Mathematikunterricht ganz allgemein ungemein wichtig sind. Im Zeitalter der Computeralgebrasysteme sollten deren Fähigkeiten dazu verwendet werden, dem Schüler diese Vorstellungen zu konkretisieren. An einigen wenigen Beispielen habe ich versucht zu verdeutlichen, wie dies geschehen kann. Die gegebene Darstellung ist keineswegs vollständig, vielmehr können noch viele weitere mathematische Konzepte von Graphiken profitieren, die sich mit DERIVE erzeugen lassen.

Die Arbeit [5] ist ein Nebenprodukt der Bücher [3]–[4], in denen erstmals im deutschsprachigen Raum der gesamte Stoff einer Analysis-Vorlesung mit Hilfe von DERIVE präsentiert wird.

Anschrift des Verfassers: Dr. Wolfram Koepf, Seelingstr. 21, 14059 Berlin
email: koepf@zib-berlin.de

Literatur

- [1] Koepf, W., Ben-Israel, A.: Integration mit DERIVE. Didaktik der Mathematik **21**, 1993, 40–50.
- [2] Koepf, W., Ben-Israel, A.: The definite nature of indefinite integrals. The International DERIVE Journal **1**, 1994, 115–131.
- [3] Koepf, W., Ben-Israel, A., Gilbert, R. P.: *Mathematik mit DERIVE*. Vieweg-Verlag, 1993, ISBN 3-528-06549-4.
- [4] Koepf, W.: *Höhere Analysis mit DERIVE*. Vieweg-Verlag, 1994, ISBN 3-528-06594-X.
- [5] Koepf, W.: Graphische Darstellungen im Analysisunterricht. Praxis der Mathematik, erscheint 1996.