BACK

FUNKTIONEN BESCHREIBEN WIRKLICHKEIT

Ariane Keil
Neustadt an der Weinstraße

1. Zum theoretischen Hintergrund

1.1. Zum Mathematikunterricht und zum Computereinsatz im Mathematikunterricht

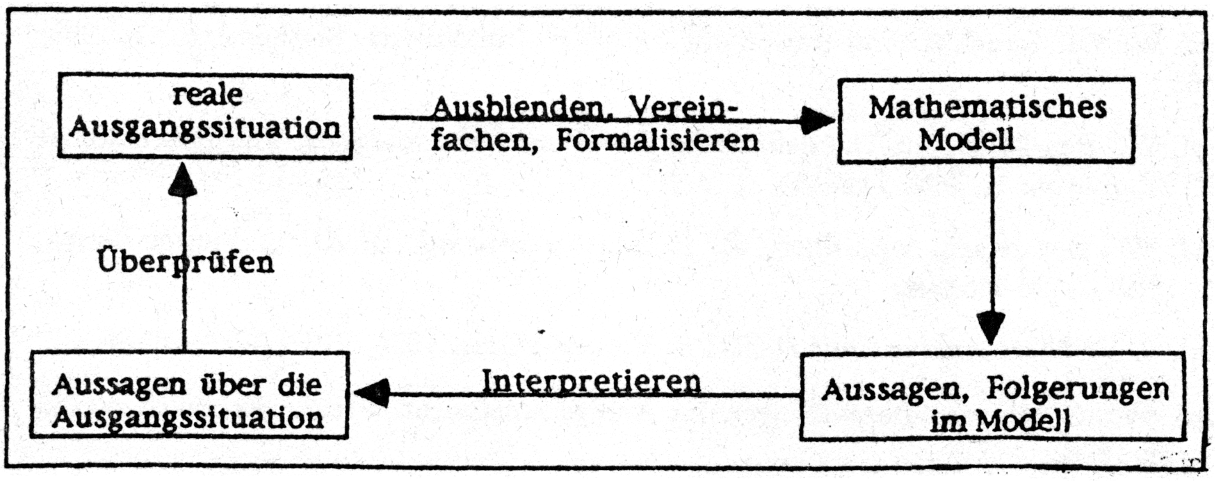
An dieser Stelle soll nicht die Frage gestellt werden, wie man möglichst viele passende Gelegenheiten finden kann, den Computer im Mathematikunterricht einzusetzen, sondern vielmehr, wie man den Unterricht anschaulich und lebendig gestalten kann. Interessant ist dabei die Frage, welchen Beitrag der Computer und die entsprechende Software leisten kann.

In den Handreichungen des Kultusministeriums von Rheinland-Pfalz (1988) wurden die Einsatzbereiche des Computers ausführlich dargestellt:

- Der Computer als programmierbare Rechenmaschine, mit dem sich mathematische Algorithmen mit hoher Geschwindigkeit und großer Zuverlässigkeit ausführen lassen.
- Der Computer als Werkzeug zur Realisierung von Lösungsansätzen.
- Der Computer als "graphisches Werkzeug" zur Darstellung von geometrischen Abbildungen, Diagrammen und Funktionsgraphen.
- Der Computer als Werkzeug zur Simulation.

1.2. Zur Modellbildung

Der Prozeß der Modellbildung für eine reale Ausgangssitutation wird als "Mathematisieren" verstanden, wie auch die folgende Skizze verdeutlicht:



Um diese Fähigkeit beim Schüler zu entwickeln und zu trainieren, bedarf es geeigneter Aufgaben für den Unterricht. In den gängigen Lehrbüchern zur Analysis findet man selten genug Material.

Hier sollen nun einige Beispiele dargestellt werden, die aus realen Ausgangssituationen entstanden sind.

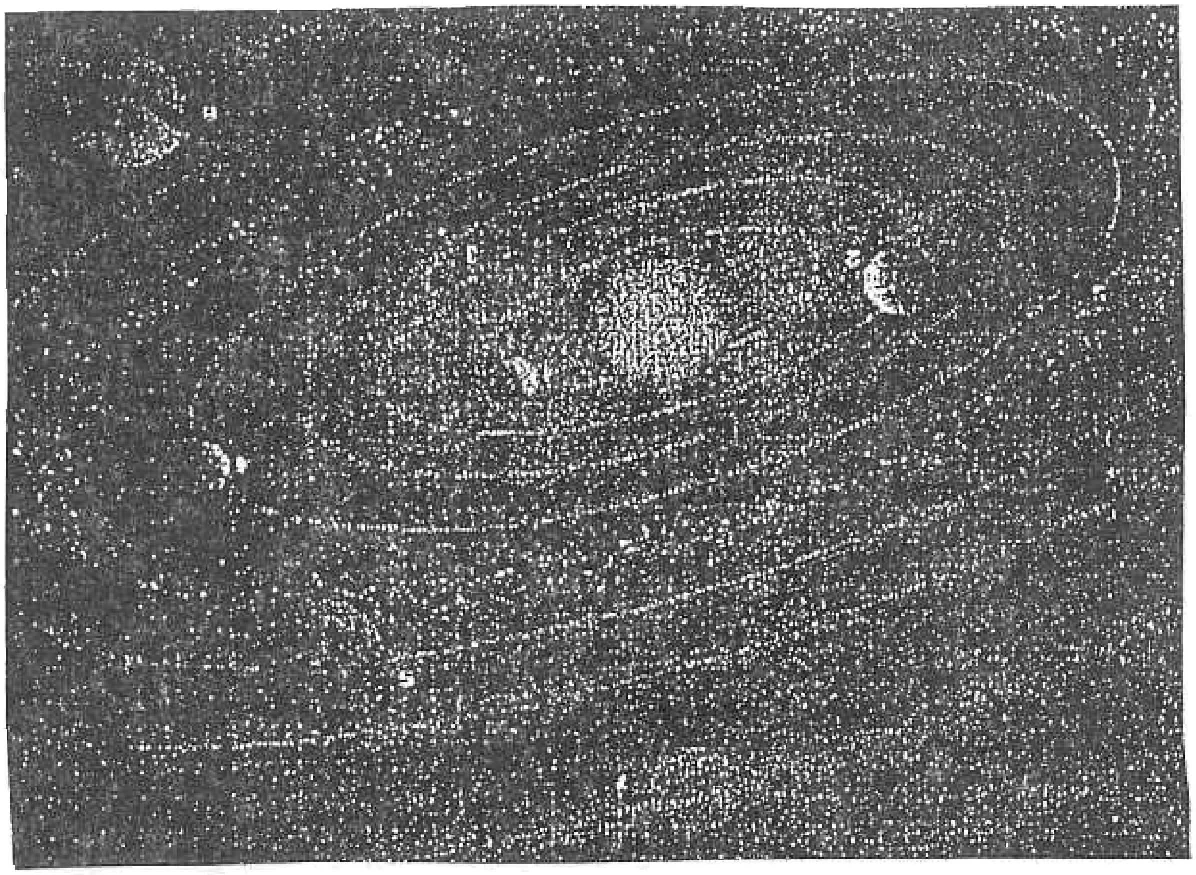
2. Das dritte Keplersche Gesetz

Kepler veröffentlichte 1609 die ersten beiden nach ihm benannten Gesetze:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem (gemeinsamen) Brennpunkt die Sonne steht,

2. Der Radiusvektor eines Planeten zur Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Problemstellung:



Das dritte Keplersche Gesetz hat Kepler erst wesentlich später - nämlich am 18. Mai 1618 - entdeckt. Mit Hilfe verfügbarer - nachfolgend aufgeführter - Beobachtungsdaten fand Kepler eine Beziehung zwischen den Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten und deren mittlerer Entfernung zur Sonne

Arbeitsblatt 1

Planet	Entfernung in Millionen km	Umlaufdauer in Tagen
Merkur	57,9	88
Venus	108,2	225
Erde	149,6	365
Mars	227,9	687
Jupiter	778,3	4.392
Saturn	1.427	10.753
Uranus	2.870	30.660
Neptun	4.497	60.150
Pluto	5.907	90.670

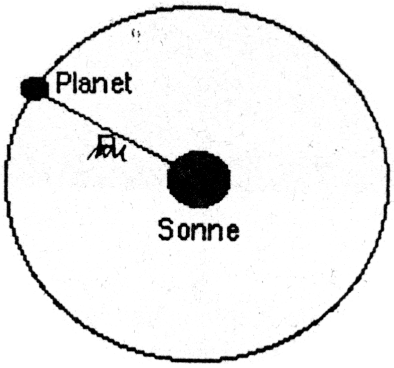
Aufgaben:

1. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Umlaufzeit und Entfernung von der Sonne der einzelnen Planeten mit Hilfe von DERIVE graphisch dar.

2. **Versuchen Sie mit Hilfe der Daten und der Grafik die Beziehung zwischen der Umlaufzeit der Planeten und deren Entfernung von der Sonne herauszufinden.**

3. Formulieren Sie dieses als (empirisches) Gesetz.

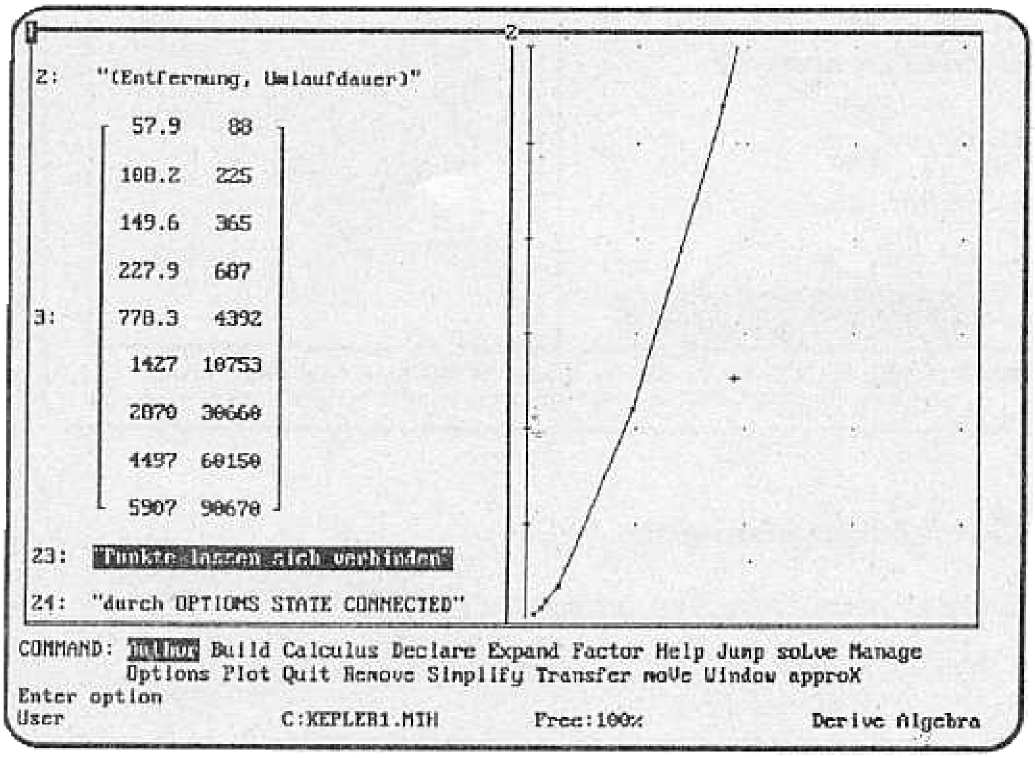
4. Nutzen Sie DERIVE zum Überprüfen Ihrer Vermutung.



Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1 und 2:

Um eine erste Idee zu gewinnen und ein Modell zu entwickeln, kann eine Graphik den Zusammenhang zwischen den beiden Werten herstellen.



In DERIVE werden Punkte als Vektoren eingegeben: [[57.9, 88],[...],...[...]].

Aufgabe 3:

Anhand der Graphik wird deutlich, daß die Kurve der Graph einer Potenzfunktion sein könnte:

$$y = ax^c$$

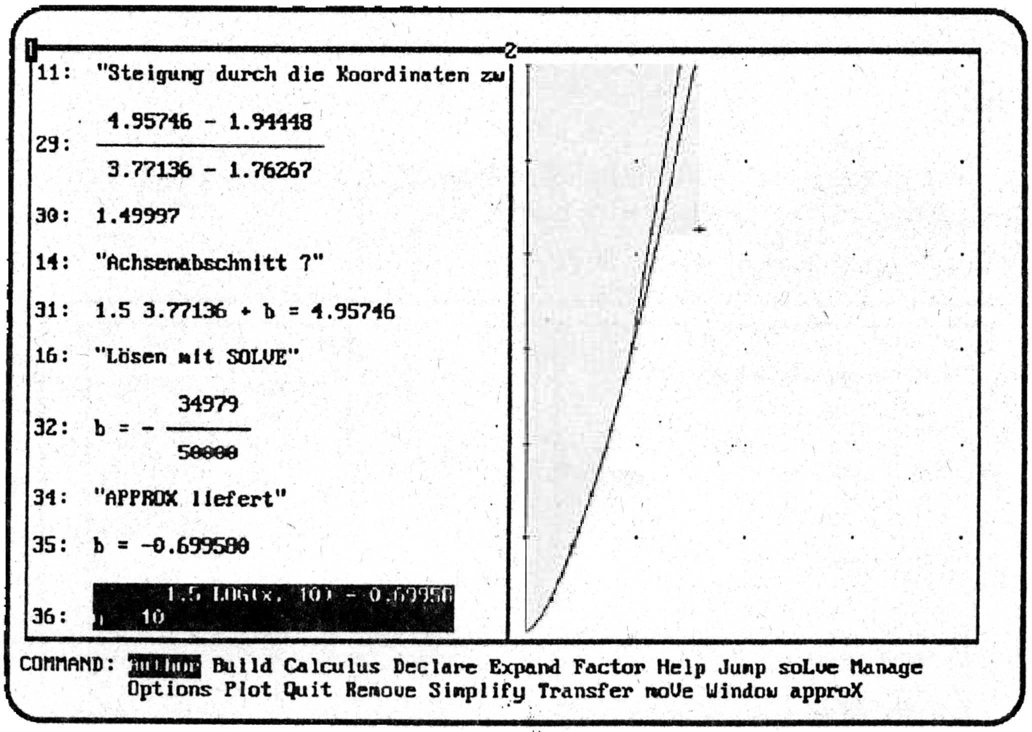
wobei x die Entfernung in Millionen km und y die Umlaufdauer in Tagen angibt.

Die entscheidende Überlegung besteht nun darin zu erkennen, wie man den Zusammenhang überprüfen kann.

Hier eignet sich ein "Log-Log-Plot", das heißt, x- und y-Werte werden logarithmisch dargestellt.

Stimmt die Vermutung, so müssen alle Punkte (log x/log y) auf einer Geraden liegen, denn es gilt:

$$\log y = \log(ax^c) = c\log x + \log a$$



Das DERIVE-Protokoll ist hinten angefügt.

Das Ergebnis dieser Untersuchung führt zu folgender Potenzfunktion:

$$y = 0.199719x^{1,5}$$

Umlaufdauer T $\leftrightarrow$ Bahnradius R

$$T = 0,2R^{1,5} = 0,2\sqrt{R^3}$$

Diese Beziehung führt auf das dritte Keplersche Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \text{ oder } \frac{T^2}{R^3} = const.$$

3. Vergleich von Höchstleistungen in verschiedenen Sportdisziplinen

Problemstellung:

Die Weltrekordzeiten in den Laufdisziplinen der Leichtathletik werden ständig verbessert. Dabei ist es schon imponierend, welche Durchschnittsgeschwindigkeiten die Läufer selbst auf den Mittel- und Langstrecken noch erreichen. Der Weltrekord der Männer über 100 m liegt bei 9,85 s, der für 400 m bei 43,29 s.

Selbstverständlich werden die Durchschnittsgeschwindigkeiten auf den langen Strecken kleiner, aber doch nur in erstaunlich geringem Umfang.

Schnelle Afrikaner

Gleich drei Weltrekorde gab es zu Beginn der Leichtathletik-Saison 1994 von afrikanischen Läufern auf den langen Strecken. Der Algerier Noureddine Morceli erreichte am 2. August 1994 in Monte Carlo über 3000 m die Zeit von 7:25,11 Min., der Äthiopier Haile Gebreselasie am 4. Juni 1994 in Hengelo über 5000 m 12:56,96 Min. und William Sigei (Kenia) am 22. Juli 1994 in Oslo 26:52,23 Min.

Kann man die Höchstleistungen der Läufer in den verschiedenen Laufstrecken miteinander vergleichen? Kann man den absoluten "Champion" bestimmen?

Es ist klar, daß man die erreichten Zeiten nicht einfach vervielfachen oder einen einfach proportionalen Ansatz wählen kann. In irgendeiner Form muß die unterschiedliche Konstitution des Sportlers, die Ermüdung des Körpers, der Sauerstoffbedarf ... berücksichtigt werden.

Zur Modellierung:

Besteht ein Zusammenhang zwischen der Länge der Laufstrecke und der dazugehörigen Weltrekordzeit?

Ein theoretischer Ansatz scheidet wegen der Komplexität der zu berücksichtigenden Bedingungen aus. Aber es ist vielleicht doch möglich, anhand der vorliegenden Daten ein Modell zu entwickeln.

Arbeitsblatt 2

Alle Daten sind dem Guinness-Buch der Rekorde 1995 entnommen.

Strecke in m	Weltrekordzeit	Weltrekordzeit in s	Athlet/Jahr
100	9,85 s	9,85	Leroy Burrell (USA) 1994
200	19,72 s	19,72	Pietro Mennea (I) 1979
400	43,29 s	43,29	Harry Reynolds (USA) 1988
800	1:41,73 min	101,73	Sebastian Coe (GB) 1981
1500	3:28,82 min	208,82	Noureddine Morceli (Algerien) 1992
5000	12:56,95 min	776,95	Haile Gebresilasie (Äthiopien) 1994
10000	26:52,23 min	1.612,23	William Sigei (Kenia) 1994

Aufgaben:

1. Stellen Sie mit DERIVE den Zusammenhang zwischen der Laufstrecke und der Weltrekordzeit graphisch dar.
2. Stellen Sie ebenso in DERIVE den Zusammenhang zwischen der Laufstrecke und der Weltrekordzeit pro 1 m Laufstrecke graphisch dar.
3. Welchen Zusammenhang können Sie erkennen?
4. Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe des Log-Log-Plots und erkennen Sie den linearen Zusammenhang. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.

   Um nicht ständig, alle Wertepaare neu eingeben zu müssen, wenn logarithmiert werden muß, kann man in DERIVE eine Funktion definieren, die das doppelte Logarithmieren übernimmt:

   DOPPEL_LOG(v,b):=VECTOR([LOG(ELEMENT(ELEMENT(v,i),1),b), LOG(ELEMENT(ELEMENT(v,i),2),b)],i,1,DIMENSION(v))

   Diese selbstdefinierte Funktion logarithmiert alle Elemente einer (2xn)-Matrix v. Die Logarithmenbasis b kann dabei frei gewählt werden.

   In DERIVE kann man diese Ausgleichsgerade mit Hilfe des Befehls **FIT([[x,ax+b],["Punkte in Vektorschreibweise"]])** bestimmen.
5. Berechnen Sie mit Hilfe von DERIVE den Potenzzusammenhang zwischen der Laufstrecke und der Weltrekordzeit.
6. Überprüfen Sie, ob die vorliegenden Daten auf dem Graphen der Potenzfunktion liegen.

Arbeitsblatt 3

Der erkannte Zusammenhang macht neugierig. Ist es rein zufällig, daß die vorliegenden Daten dieser Regelmäßigkeit unterliegen? Kann man ähnliche Zusammenhänge auch bei anderen Disziplinen erkennen?

Mögliche weitere Beispiele können aus verschiedenen Bereichen gewählt werden:

1. die verschiedenen Laufstrecken der Frauen
2. die verschiedenen Freistilschwimmstrecken der Männer und Frauen
3. die verschiedenen Eisschnellaufstrecken der Männer und Frauen
4. die verschiedenen Radfahrstrecken unter gleichen Bedingungen.

Um die naheliegende Vermutung besser stützen zu können, wählen wir als weitere Beispiele die Weltrekorde der Frauen im Laufen und die Weltrekorde der Männer und Frauen im Freistilschwimmen:

Weltrekordzeiten beim Laufen der Frauen:

Strecke in m	Weltrekordzeit	Athlet/Jahr
100	10,49 s	Florence Griffith-Joyner (USA) 1988
200	21,34 s	Florence Griffith-Joyner (USA) 1988
400	47,60 s	Marita Koch (DDR) 1985
800	1:53,28 min	Jarmila Kratochvilova (CSFR) 1983
1.500	3:50,46 min	Yunxia Qu (China) 1993
3.000	8:06,11 min	Yunxia Wang (China) 1993
5.000	14:37,33 min	Ingrid Kristiansen (N) 1986
10.000	29:31,78 min	Yunxia Wang (China) 1993

Aufgabe:

7. Untersuchen Sie ebenso den Zusammenhang zwischen den Laufstrecken der Frauen und deren Weltrekordzeiten..

Arbeitsblatt 4

Weltrekordzeiten beim Freistilschwimmen der Männer:

Strecke in m	Weltrekordzeit	Athlet/Jahr
50	21,81 s	Tom Jager (USA) 1990
100	48,21 s	Alexander Popow (Rußland) 1994
200	1:46,69 min	Giorgio Lamberti(I) 1989
400	3:45,00 min	Jewgeni Sadowyi (GUS) 1992
1.500	14:43,48 min	Kieren Perkins (Australien) 1992

Weltrekordzeiten beim Freistilschwimmen der Frauen:

Strecke in m	Weltrekordzeit	Athlet/Jahr
50	24,79 s	Wenyi Yang (China) 1992
100	54,48 s	Jenny Thompson (USA) 1992
200	1:57,55 min	Heike Friedrich (DDR) 1986
400	4:03,85 min	Janet Evans (USA) 1988
800	8:16,22 min	Janet Evans (USA) 1989
1.500	15:52,10 min	Janet Evans (USA) 1988

Aufgaben:

8. Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen den Schwimmstrecken und den Weltrekordzeiten.

9. Alle betrachteten Disziplinen weisen zwischen Streckenlänge und Weltrekordzeit einen Zusammenhang der Form

$$t = c \bullet s^k$$

auf, wobei t die Weltrekordzeit in Sekunden angeben soll und s die entsprechende Streckenlänge in Meter. c und k hängen jeweils von der sportlichen Disziplin ab. Bestimmen Sie jeweils c und k, die den entsprechenden Potenzzusammenhang verdeutlichen. Tabellieren Sie dieses für Ihre durchgeführten Betrachtungen.

Arbeitsblatt 5

Sportdisziplin	c	k
Laufen Männer		
Laufen Frauen		
Freistilschwimmen Männer		
Freistilschwimmen Frauen		

10. Die Konstante $k > 1$ kann als Maß für die Ermüdung des Körpers interpretiert werden. Ohne diese Ermüdung müßte $k = 1$ gelten und damit $t = c \bullet s$. Die Größe c ist der konstante Quotient $\frac{t}{s^k}$.

Nun ist es möglich, auch die entsprechenden Modellweltrekordzeiten zu berechnen und mit den realen zu vergleichen.
Bestimmen Sie die Modellweltrekorde für die Laufstrecken der Männer.

Laufstrecke s	realer Weltrekord t	Modellweltrekord
100	9,85 s	
200	19,72 s	
400	43,29 s	
800	101,73 s	
1.500	208,82 s	
5.000	776,95 s	
10.000	1612,23 s	

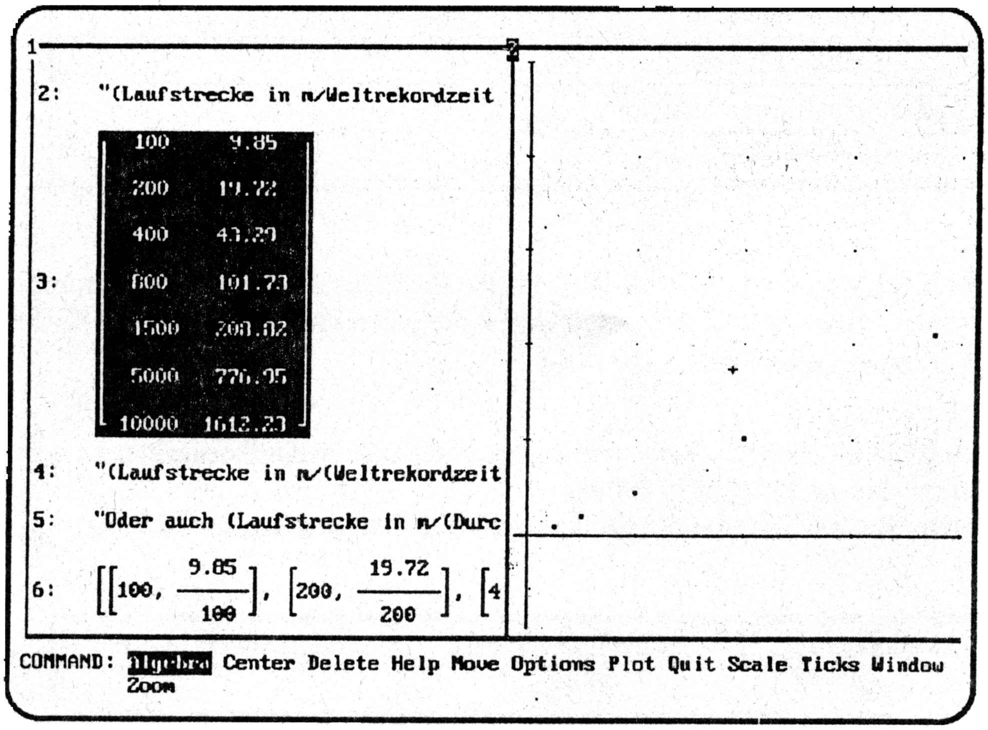
11. Wie lassen sich die vorkommenden Differenzen interpretieren?
Stellen Sie die Abweichungen wieder graphisch dar.

12. Es ist sicher nicht sinnvoll, die Differenzen absolut zu betrachten, deswegen sind hier wieder die Abweichungen der Weltrekordzeiten (Residuen) zu denen der Ausgleichsgeraden im Log-Log-Plot zu bestimmen, da die absoluten Zahlen dabei relativiert werden. 1 Sekunde Abweichung ist sicher beim 100-m-Lauf anders zu bewerten als beim 10000-m-Lauf.
Stellen Sie diese Residuen wieder graphisch dar.

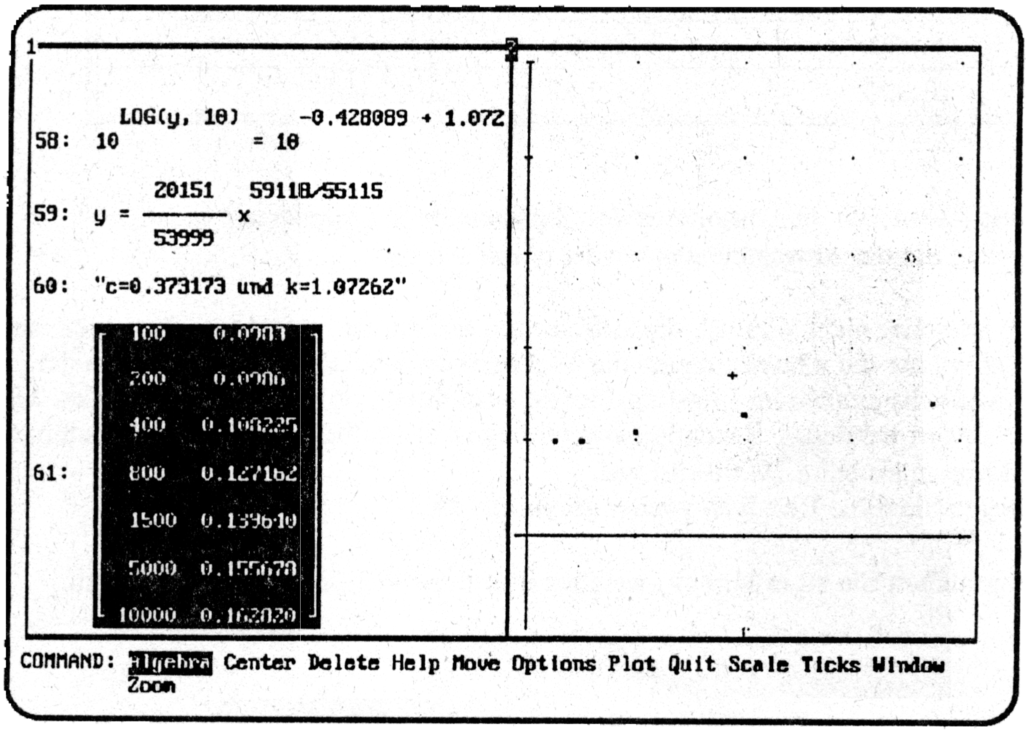
13. **Versuchen Sie zu erkennen, welches nun der "absolute Champion" ist.**

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:



Aufgabe 3:

Es ist auch hier wieder ein funktionaler Zusammenhang zu vermuten. Wahrscheinlich liegen alle Punkte auf dem Graphen einer Potenzfunktion der Form

$$y = ax^c$$

Aufgabe 4 und 5:

23: "Ermitteln der Ausgleichsgerade"

32: "Laufen Männer"

24: $\mathrm{FIT}\left[[x,\ a\,x + b],\ \left[\left[2,\ \frac{5600}{5637}\right],\ \left[\frac{6031}{2621},\ \frac{5695}{4390}\right],\ \left[\frac{6820}{2621},\ \frac{6251}{3020}\right],\ \left[\frac{61351}{21133}\right.\right.\right.$

25: $\frac{13039}{12340}x - \frac{21091}{16694}$

31: $1.12147\,x - 1.26338$

26: "x und y sind hier die logarithmierten Werte"

27: $10^{\mathrm{LOG}(y,\ 10)} = 10^{1.12147\,\mathrm{LOG}(x,\ 10) - 1.26338}$

30: "Die Potenzfunktion lautet:"

28: $y = 0.0545280\,x^{1.12146}$

29: "r=0.0545280 und k=1.12146"

Der lineare Zusammenhang ist gegeben durch:

$$\log(y) = -1.26338 + 1.12147 \bullet \log(x)$$

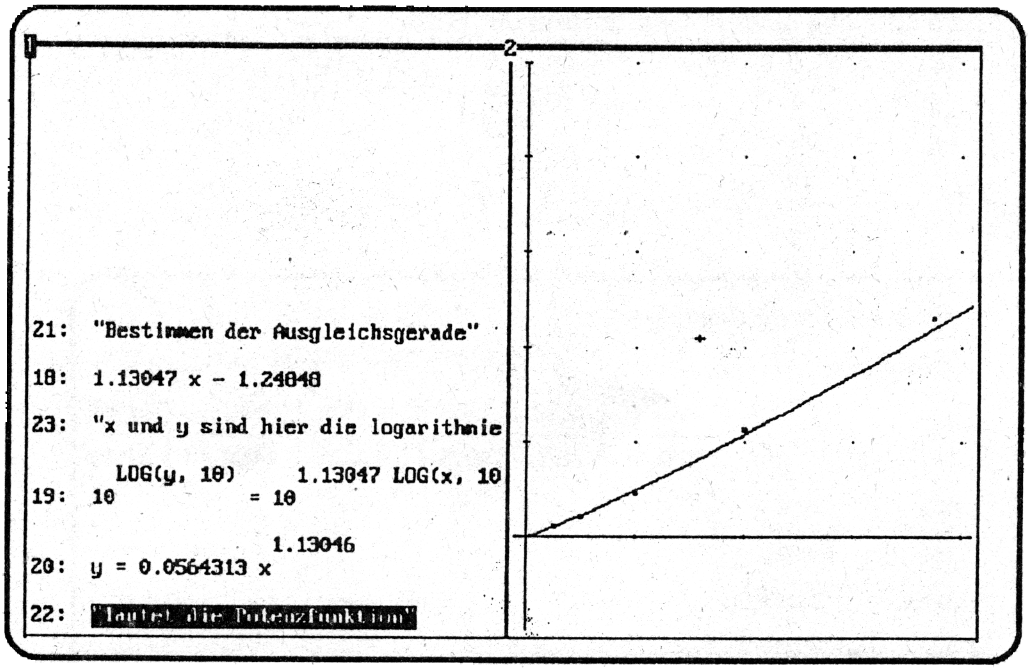
Aus dem linearen Zusammenhang läßt sich folgender Potenzzusammenhang schließen:

$$y = 0.0545280 \bullet x^{1.12146}$$

Aufgabe 6:

Die Überprüfung ist einfach durchzuführen durch Plotten der einzelnen Wertepaare und der Potenzfunktion. Anhand der Graphik kann man die Übereinstimmung erkennen.

Aufgabe 7:



Der Zusammenhang lautet:

$$y = 0.0564313 \bullet x^{1.13046}$$

Aufgabe 8:

Zur Lösung kommt man auf dem gleichen Weg wie bei Aufgabe 7.

Die Beziehung zwischen den Freistilschwimmstrecken der Männer und deren Weltrekorde lautet:

$$y = 0.32103 \bullet x^{1.08806}$$

Bei Freistilschwimmen der Frauen sieht es folgendermaßen aus:

$$y = 0.391894 \bullet x^{1.0696}$$

Aufgabe 9:

Sportdisziplin	c	k
Laufen Männer	0.054528	1.12146
Laufen Frauen	0.0564313	1.13046
Freistilschwimmen Männer	0.321030	1.08806
Freistilschwimmen Frauen	0.391894	1.0696

Die Ermüdungskonstante k ist bei Männern und Frauen bei gleichen Sportarten im wesentlichen gleich, im Freistilschwimmen ist sie kleiner als beim Laufen. Auffällig ist, daß sie bei Frauen im Freistilschwimmen geringer als bei Männern. Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Interpretation zu versuchen:

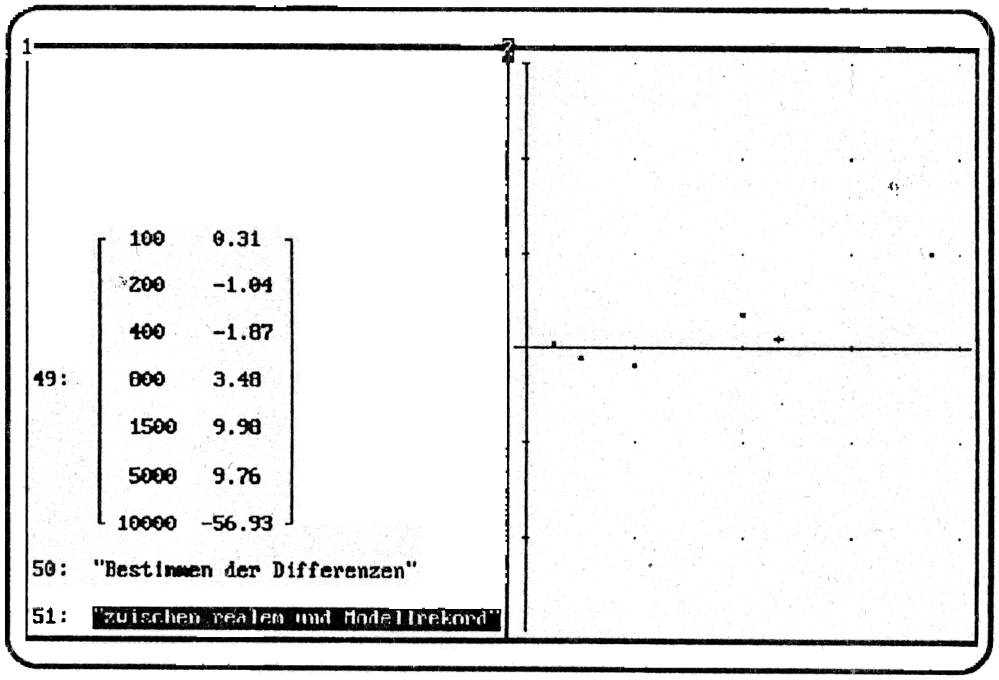
- die Zeiten der Frauen sind noch nicht am absoluten Limit,
- Frauen ermüden speziell im Schwimmen nicht so schnell.

Aufgabe 10:

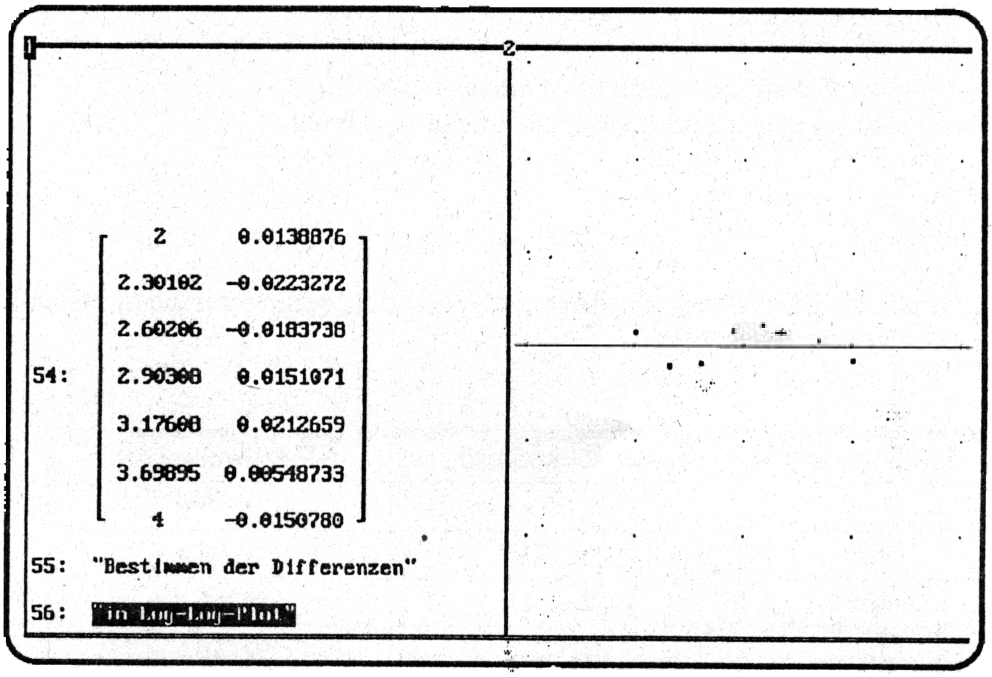
Die einzelnen Werte für Modellweltrekordzeiten ergeben sich, wenn man die Streckenlänge in die ermittelte Potenzfunktion einsetzt.

Laufstrecke s	realer Weltrekord t	Modellweltrekord
100	9,85 s	9,54 s
200	19,72 s	20,76 s
400	43,29 s	45,16 s
800	101,73 s	98,25 s
1.500	208,82 s	198,84 s
5.000	776,95 s	767,19 s
10.000	1612,23 s	1669,16 s

Aufgabe 11:



Aufgabe 12:



Betrachtet man diese Differenzen, so erkennt man, daß der 200-m-Weltrekord die größte negative Abweichung vom theoretischen Modellwert der Ausgleichsgerade zeigt. Sie kann auch in diesem Sinn als der "beste" Rekord auf der Laufstrecke der Männer angesehen werden.

Es ergibt sich folgende Rangfolge:

Absoluter Champion:	200 m
2.	400 m
3.	10000 m
4.	5000 m
5.	100 m
6.	800 m
7.	1500 m

Arbeitsblatt 6:

Erweiterungsmöglichkeiten:
Aufgabe:

14. Es gibt noch eine andere Möglichkeit, die Weltrekordzeiten sinnvoll zu vergleichen: In dem bisherigen Modell ist der Quotient $\frac{t}{s^{1.12}}$ für jede Laufstrecke konstant. Setzt man an die Stelle des Ausgleichswerts die reale Weltrekordzeit ein, so erhält man ein c*, das von c nach unten oder oben abweicht. Kleinere Werte von c* weisen im Vergleich der Weltrekordzeiten auf die "besseren" Leistungen hin.

Laufstrecke s	realer Weltrekord t	c*
100	9,85 s	
200	19,72 s	
400	43,29 s	
800	101,73 s	
1.500	208,82 s	
5.000	776,95 s	
10.000	1612,23 s	

15. Ermitteln Sie mit Hilfe dieses Kriteriums den **"absoluten Champion"**.

Absoluter Champion:	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	

16. Genauso kann man mit Hilfe dieser Methode die individuell beste Leistung eines Sportlers bestimmen. Der Quotient c* kann einem Sportler Aufschluß geben, wie die einzelnen Leistungen eines Sportlers zu bewerten sind.
Beispiel: Der Zehnkämpfer Jürgen Hingsen 1984

Laufstrecke	Zeit	c*
100 m	10.91 s	
400 m	47.69 s	
1500 m	262.60 s	

```
1:    "Aufgabe 1"

2:    "Erstellen einer Graphik anhand der gegebenen Tabelle"

      "(Entfernung, Umlaufdauer)

      /  57.9     88   \
      |
      | 108.2    225
      |
      | 149.6    365
      |
      | 227.9    687
      |
4:    | 778.3    4392
      |
      |  1427   10753  |
      |                |
      |  2870   30660  |
      |
      |  4497   60150  |
      |                |
      \  5907   90670  /

5:    "Punkte lassen sich verbinden"

6:    "durch OPTIONS STATE CONNECTED"

7:    "Aufgabe 2"

8:    "LOG(zahl,10) ist LOG zur Basis 10"

      /  LOG(57.9, 10)     LOG(88, 10)    \
                                          |
      | LOG(108.2, 10)    LOG(225, 10)
      |
      | LOG(149.6, 10)    LOG(365, 10)

        LOG(227.9, 10)    LOG(687, 10)
      |
9:    | LOG(778.3, 10)    LOG(4392, 10)
      |
      |  LOG(1427, 10)   LOG(10753, 10)
      |
         LOG(2870, 10)   LOG(30660, 10)

      |  LOG(4497, 10)   LOG(60150, 10)
      |
      \  LOG(5907, 10)   LOG(90670, 10) /

      "APPROX liefert"
```

$$\begin{pmatrix} 1.76267 & 1.94448 \\ 2.03422 & 2.35218 \\ 2.17493 & 2.56229 \\ 2.35774 & 2.83695 \\ 2.89114 & 3.64266 \\ 3.15442 & 4.03152 \\ 3.45788 & 4.48657 \\ 3.65292 & 4.77923 \\ 3.77136 & 4.95746 \end{pmatrix}$$

"Aufgabe 4: Ermitteln der linearen Funktion"

"Steigung durch die Koordinaten zweier Punkte"

$$\frac{4.95746 - 1.94448}{3.77136 - 1.76267}$$

28: 1.49997

17: "Achsenabschnitt ?"

18: $1.5\ 3.77136 + b = 4.95746$

19: "Lösen mit SOLVE"

20: $b = - \frac{[illegible]979}{[illegible]000}$

21: "APPROX liefert"

26: $b = -0.699580$

23: $y = 10^{1.5\ \mathrm{LOG}(x,\ 10)\ -\ 0.69958}$

24: "APPROX liefert"

25: $y = 0.199719\ x^{1.5}$