BACK

Nicht immer, aber immer öfter: Die etwas andere Aufgabe – mit und ohne DERIVE™ *

Wilfried Herget, TU Clausthal

Wieviel Kurvendiskussion braucht der Mensch?

Es ist soweit: Schon sehr bald werden unsere Gymnasiasten über erschwingliche, aber leistungsfähige Taschencomputer verfügen – so, wie ihn jetzt Texas Instruments mit dem TI-92 vorgestellt hat. Vereinfachen auch komplizierter Terme, Differenzieren, Integrieren, Kurvenzeichnen, Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen und vieles mehr werden damit zu Aufgaben, die genauso schnell und einfach per Tastendruck zu lösen sind wie etwa „Löse $x^2 = 123{,}45$“ oder „Berechne $\cos^2(-0{,}123)$“.

Lassen sich die bewährten Kurvendiskussionen noch lange gegen diese Realität verteidigen? Was ändert sich dadurch im Mathematikunterricht? Erfordert dies nicht eine entsprechende Verschiebung der Schwerpunkte im Unterricht, weniger Einüben von Rechentechniken, sondern stärkeres Betonen eher schöpferischer, beschreibender, begründender und beurteilender Fähigkeiten? Diese Fragen habe ich bereits vor vier Jahren gestellt (HERGET 1992), und seither haben wir insbesondere im GDM-Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik“ versucht, neue und alte Antworten zu finden (HISCHER 1992, 1993, 1994).

Die zentrale Bedeutung der Aufgaben

Wie aber sieht es im Unterrichtsalltag aus? In einem System, wo bei *allen* Beteiligten sich alles immer wieder um Noten und Bewertung, um Leistung und Erfolg dreht, kommt den Aufgaben insbesondere in Leistungskontrollen eine entscheidende Bedeutung zu. Ich möchte deswegen hier einen pragmatischen, an der Schulrealität orientierten Ansatz weiter verfolgen: Wie können (könnten, sollen, sollten, müssen, müßten, ...) „andere“ Aufgaben für *Klausuren* bzw. für *Klassenarbeiten* aussehen, die die genannten, angestrebten bzw. anzustrebenden höheren Fähigkeiten ansprechen?

Neue Aufgaben – alte Aufgaben

Die zu testenden Fähigkeiten möchte ich in Anlehnung an MEYER/WINKELMANN grob in zwei Klassen einteilen:

- ***Mathematisierung***
  Darunter verstehe ich die geeignete Übersetzung (teil-)offener Anwendungssituationen in ein passendes mathematisches Modell bis hin zur Interpretation der schließlich erhaltenen Ergebnisse in der ursprünglichen Situation.
- ***Reflexion***
  Dazu gehören für mich die kreative Entwicklung, treffende Beschreibung und sachgerechte Beurteilung mathematischer Begriffe, Argumentationen und Verfahren.

Die Suche nach Aufgaben, die diese Aspekte stärker als bisher üblich ansprechen, erweist sich leider als sehr mühsam. Meist stößt man auf „interessante“ Fragestellungen für motivierende *Einstiege* in Unterrichtseinheiten oder für Unterrichtsprojekte, und es ist oft nur schwer möglich, hieraus dann Aufgaben zu konstruieren, die sich für *Prüfungen* eignen.

Einige Aufgabenbeispiele, die ich für geeignet halte, habe ich in HERGET 1993 und 1994 vorgestellt, und 1995 habe ich in der Zeitschrift *Mathematik lehren* eine ständige Rubrik „Die etwas *andere* Aufgabe“ dazu begonnen; ich beschränke mich daher im folgenden auf eine knappe Skizze.

Die „umgekehrte“ Kurvendiskussion

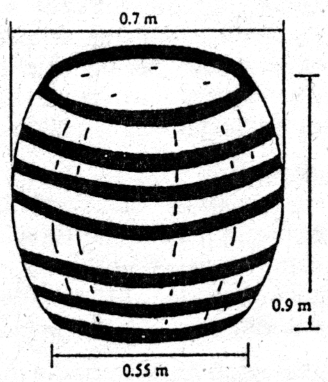
Ist der Funktionsterm gegeben, dann kann das Zeichnen des Graphen dem Taschencomputer übertragen werden. Auch die Diskussion der Eigenschaften und der besonderen Punkte verliert durch die technischen Möglichkeiten (Zoomen usw.) erheblich an Wert. Dagegen bleibt die umgekehrte Problemstellung, nämlich das Finden eines geeigneten Funktionsterms zu vorgegebenen

* Überarbeitete und teilweise ergänzte Fassung von HERGET 1995.

Eigenschaften, unverändert wichtig und weiterhin anspruchsvoll.

Solche Fragestellungen tauchen beim Anpassen von Funktionsgraphen in realen Situationen auf, etwa bei der genauen Festlegung einer Straßenführung oder einer Eisenbahntrasse (vgl. HENN, S. 124-125 oder STEINBERG), bei der Suche nach einer geeigneten Gesetzesvorschrift (z. B. HERGET 1986, S. 385-388). Aufgaben dieser Art sprechen in typischer Weise den Aspekt der Mathematisierung an.

Wieviel Naß paßt ins Faß?



1. a) Begründen Sie mit elementargeometrischen Mitteln, daß weniger als 400 000 cm^3 in das Faß hineinpassen.

   b) Skizzieren Sie eine Herleitung für die Formel

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

   zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers.

   c) Bestimmen Sie das Volumen des Fasses möglichst genau.

2. Das Faß wird mit stets gleich starkem Wasser-Zulauf gefüllt.

   a) Begründen Sie, warum der Wasserstand *nicht* mit konstanter Geschwindigkeit steigt.

   b) Bei welchem Wasserstand steigt der Wasserspiegel am langsamsten, bei welchem am schnellsten?

   c) Skizzieren Sie den Graphen für die Funktion *h*: Zeit → Wasserstand.

Die „Faß-Aufgabe"

Bei der nebenstehenden „Faß-Aufgabe" geht es u. a. um die Beschreibung eines geometrischen Objektes, hier des Krümmungsverlaufes des Fasses (HERGET 1994).

Im Verlauf der Lösung dieser Aufgabe müssen zunächst geeignete Namen für die Einflußgrößen vergeben werden. Für 1. a) genügt der einfache Vergleich mit einem umbeschriebenen Kreiszylinder. Für 1. b) ist an die Wiedergabe der aus dem Unterricht bekannten Beweisidee gedacht. Ähnliche Aufgabenstellungen sollten vertraut sein. Der Teil 1. c) ist vielleicht am ungewohntesten: Hier ist es insbesondere nötig, ein Koordinatensystem selbständig zu wählen – dies kann sehr verschieden geschehen; günstig ist es etwa, das Faß „auf die Seite zu legen" und den Ursprung des Koordinatensystems genau in das Zentrum des Fasses zu legen. Dann ist eine Formel für den seitlichen Umrißverlauf des Fasses zu entwickeln, wobei durchaus verschiedene Ansätze denkbar sind. Sowohl der geometrisch naheliegende Kreisbogenansatz als auch der eher an vertrauten Funktionen orientierte Ansatz mit einer quadratischen Parabel scheinen mir gleich gut geeignet zu sein; beide Ansätze verlangen rechnerisch ähnlichen Aufwand und führen durchaus auch ohne mathematische Software und ohne Taschencomputer zum Erfolg.

Teil 2.) schließlich verlangt im wesentlichen qualitative Aussagen statt der üblichen quantitativen Ergebnisse, und Fähigkeiten im Begründen, Formulieren und Argumentieren sind gefragt.

Diese Aufgabe geht auf einen Hinweis von Josef Böhm zu einer Aufgabe aus den USA mit dem Originaltitel „How much does a barrel hold?" zurück. Ich habe sie später auf einer weiteren Tagung Anfang 1994 gemeinsam mit Kolleginnen und Kollegen in der angegebenen Gestalt formuliert; dort wurde ich dann auf eine ähnliche Aufgabe in SCHMID, S. 12-13 aufmerksam gemacht.

Divergente Aufgaben statt konvergente Aufgaben

Heinrich WINTER stellt die folgenden beiden Aufgaben nebeneinander; Aufgaben vom Typ (1) nennt er „konvergent", solche vom Typ (2) nennt er „divergent".

(1) Löse die quadratische Gleichung $x^2 + x - 12 = 0$.

(2) Suche (z. B. 10) möglichst verschiedenartig aussehende quadratische Gleichungen, die alle die Lösungsmenge $\{-4, 3\}$ haben.

Konvergente Aufgaben wie (1) haben nur *eine* einzige Lösung, und es soll in der Regel nur *ein* bekanntes Lösungsverfahren angewendet werden. Ziel der Aufgabe ist es, dieses Lösungsverfahren einzuüben bzw. dieses abzuprüfen. Solche Aufgaben haben sich in der Schulwirklichkeit bewährt, sie beherrschen eindeutig unsere Schulbücher und die Klassenarbeiten und Klausuren - für die Lehrer sind sie leicht zu korrigieren, und für die Schüler sind sie (wenigstens leidlich) trainierbar. Die Kurvendiskussion als traditionelle Abituraufgabe ist eine typische konvergente Aufgabe.

Divergente Aufgaben wie (2) haben *mehr als eine* Lösung. Als erster Lösungsansatz genügt vielleicht durchaus eine einzige Standardidee – hier etwa der Viëtasche Wurzelsatz: $(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12 = 0$. Offen bleibt aber nun, wie weitere, dem Aufgabentext gemäß „möglichst verschiedenartig aussehende" Gleichungen zu finden sind. Dazu gilt es, algebraisches Wissen zu aktivieren und dieses dann schöpferisch einzusetzen – genau das ist das erklärte Ziel dieser Aufgabe.

Eine Gleichung wird eingekleidet

Bei den üblichen Textaufgaben geht es darum, zunächst den Text aus der Umgangssprache in die Formel-Sprache der Mathematik, also etwa in eine Gleichung zu übersetzen. Eine umgekehrte Problemstellung, nämlich eine vorgegebene Gleichung einzukleiden, ist eher selten und mag zunächst vielleicht wenig „mathematisch" erscheinen.

Versuche, zwei weitere (möglichst lustige) Textverkleidungen für die Gleichung $x + 4 = 18$ zu finden.

Aufgaben wie diese, eingebettet in eine geeignete Umgebung, haben Karin WAGENFÜHR und ich bewußt sogar in einem Schüler-(Nach-)Hilfe- und Übungsbuch aufgenommen. Unsere Erfahrungen im Unterricht zeigen, daß sich damit das grundlegende Verständnis für den wichtigen Übersetzungsprozeß zwischen den beiden „Sprachen" erkennbar verbessern läßt – nicht zuletzt auch deshalb, weil für „mathe-schwache" Schülerinnen und Schüler solche Fragestellungen einfacher sind und sich daher auch eher Erfolgserlebnisse einstellen.

„Öffnen" von konvergenten Aufgaben

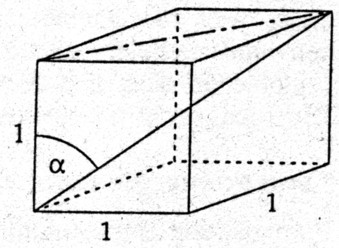
Auch die Formulierung einer Aufgabe beeinflußt den Anforderungscharakter ganz erheblich. Als Beispiel hierfür nachfolgend zwei Aufgaben aus meinem regelmäßigen „Vorkurs Mathematik" für die Ingenieur-Studienanfänger an der TU Clausthal.

Ein zylindrisches Rohrstück wird auf der einen Seite schräg abgeschnitten. Skizzieren Sie die Mantelfläche. Geben Sie Gleichungen für die Randlinien dieser Mantelfläche in einem geeigneten Koordinatensystem an.

Wie groß ist der Winkel, den eine Raumdiagonale eines Würfels mit einer anliegenden Kante bildet?

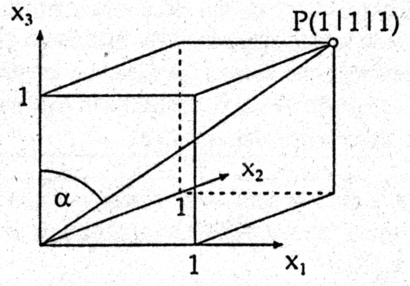
Die Aufgaben sind ganz bewußt knapp formuliert, Lösungswege sind nicht vorgezeichnet, Benennungen und Variablennamen fehlen, die passenden Koordinatensysteme sind erst noch (möglichst geeignet!) zu wählen. Dies ist für meine Studenten ungewohnt, und es ist zweifellos sehr anspruchsvoll, aufwendig und anstrengend (und zwar auch für die, die die Lösungen solcher Aufgaben beurteilen müßten!) – aber es verlangt und fördert gerade diejenigen Fähigkeiten, die nicht ohne weiteres dem Computer übertragen werden können!

Würde man jeweils eine Zeichnung mit einem günstigen Koordinatensystem, mit nützlichen Hilfslinien und sinnvollen Benennungen ergänzen, so wäre allein dadurch schon für jede der beiden Aufgaben die Lösung (und, zugegeben, auch die Korrektur!) erheblich erleichtert. Insbesondere die zweite Aufgabe könnte dadurch (je nach der Art des Vorwissens) sogar zu einer Standardaufgabe werden:



Wie groß ist der Winkel α, den eine Raumdiagonale dieses Einheits-Würfels mit einer anliegenden Kante bildet?

Für einen Kurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie, in dem es gerade um das Berechnen von Winkeln mit Hilfe des Skalarprodukts geht, sähe die Standardversion vielleicht so aus:



Wie groß ist der Winkel α, den eine Raumdiagonale dieses Einheits-Würfels mit einer anliegenden Kante bildet?

Bisher hatten meine Erfahrungen beim Stellen und Korrigieren von Aufgaben stets dazu geführt, daß die Formulierungen umfangreicher wurden; sorgfältig ergänzt mit hilfreichen Hinweisen, Benennungen und Zeichnungen. Aber ist es wirklich richtig, unseren Schülerinnen und Schülern (und, natürlich, uns selbst) dies immer und überall so leicht wie nur irgend möglich zu machen? Bleiben dann nicht gerade nur die rechentechnischen Routineaufgaben übrig – und all die anderen, anspruchsvolleren und wirklich „bildenden" höheren Anforderungen und Fähigkeiten auf der Strecke?

Der mathematische Aufsatz

Aufgaben, in denen umgangssprachlich argumentiert, begründet und beschrieben werden muß, sind ausgesprochen selten. Bei den üblichen Mathematik-Aufgaben geht es höchstens noch darum, sich für das richtige Lösungsverfahren zu entscheiden – dann wird (fast) nur noch gerechnet. Die nützliche, zweckmäßige, zeit- und platzsparende Symbol- und Formelsprache der Mathematik verleitet dazu, sich ausschließlich in dieser Welt zu bewegen. Tatsächlich ist dies aber nur ein Teil der Mathematik; tatsächlich besteht Mathematik sehr wohl auch aus sprachlicher Kommunikation, selbst und gerade in der Wissenschaft. Schülerinnen und Schüler (und auch ich) beklagen, daß Schulbücher nicht leicht zu lesen sind – aber zum einen ist es nun einmal schwer, Mathematik zu vermitteln, und noch schwerer, es schriftlich tun zu müssen, und zum anderen will es auch gelernt sein, mathematische Texte zu lesen. Warum also nicht als *eine* Aufgabe in der entsprechenden Klausur stellen:

> Wie löst man eine quadratische Gleichung? Beschreibe ausführlich an einem von dir geeignet gewählten Beispiel, wie du bei der Methode der quadratischen Ergänzung vorgehst.

„Wo steckt der Fehler?"

Falsche Argumentationen zu entlarven, Fehler aufzudecken und Sachverhalte richtigzustellen, Standpunkte mit Mathematik zu begründen – all das bedeutet auch, sich mit Mitteln der Sprache kritisch auseinanderzusetzen.

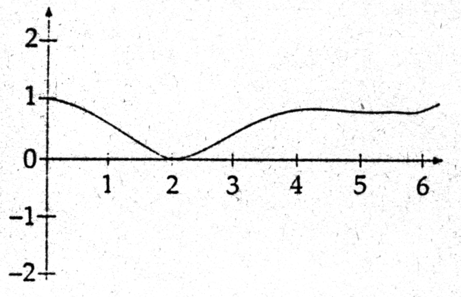
> Klaus rechnet:
>
> $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 -1 = -2$$
>
> Klara: "Aber $1/x^2$, der Integrand, ist doch immer positiv!"
>
> Klaus: "Klar(a), ..."
>
> **Was meinen Sie dazu?**

In dieser Aufgabe geht es um ein „Rezept", das in der Regel routinemäßig angewendet wird. Ziel ist es, die Grenzen des Verfahrens (wieder) in den Blick zu nehmen. Übrigens rechnete selbst DERIVE™ bis vor kurzem noch genauso falsch wie Klaus...

Qualitative Aufgaben statt quantitative Aufgaben

Die folgende Aufgabe zeigt eine weitere Möglichkeit, das Rechnen zugunsten inhaltlicher, qualitativer Argumentationen zurückzudrängen: Funktionen werden nicht durch Terme vorgegeben, sondern nur qualitativ durch eine Skizze des Graphen beschrieben.

Die Zeichnung zeigt den Graphen von $x \to f(x)$.



Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen von $x \to f'(x)$.

Um das *Verständnis* des *Begriffs* „Ableitung" bzw. das *Grundwissen* um das *Verhalten* bestimmter Funktionstypen anzusprechen, ist eine solche qualitative Aufgabe sicher besser geeignet als Aufgaben der Form „Differenzieren Sie $f(x) = \ldots$" oder „Skizzieren Sie das Schaubild zu $f(x) = \ldots$"!

Aufgaben mit Taschencomputer und Mathematik-Software

Aufgaben wie die oben genannten unterscheiden sich dadurch von Standardaufgaben wie z. B. der Diskussion einer Kurvenschar, daß ihre Lösung oft erheblich anspruchsvollere Ideen und Ansätze erfordern. Daneben sind aber jetzt auch solche „alternativen" Aufgaben im Unterricht oder in einer Klausur möglich, die zwar vom Lösungsansatz und vom Lösungsweg her durchaus vertraut sind, die sich aber als rechnerisch-algebraisch so anspruchsvoll und aufwendig erweisen, daß sie ohne die Verwendung von mathematischer Software „klausur-untauglich" wären. Ich sehe hier eine direkte Parallele zum inzwischen längst alltäglichen Taschenrechner: So wie dieser es erlaubt, weit mehr als bisher Aufgaben mit „realistischen" Zahlenwerten zu behandeln, ermöglichen es (Taschen-) Computer und mathematische Software, (sich) Aufgaben zu stellen, die auf „realistische" Terme und Gleichungen führen.

Einige derartige Aufgaben sind u. a. in WUNDERLING, in HENN und in HERGET 1994 beschrieben.

Können wir das leisten?

Sicherlich können wir Aufgaben „öffnen", können den Anteil von „konvergenten" Aufgaben zugunsten von „anderen" Aufgaben reduzieren. Aber in welchem Umfang können wir dies leisten? Im üblichen Dreiviertel-Stunden-Takt, in einem Gymnasium, dem schon rund die Hälfte eines Jahrgangs angehört (oder gar an der Hauptschule), angesichts übervoller Klassen, chronisch mangelhafter Lehreraus- und -weiterbildung und allgegenwärtigem Benotungszwang, vielleicht gar mit Zentralabitur? Es bleibt noch viel zu tun...

Kleine Schritte...

Bei der genaueren Betrachtung dieser und anderer Beispiele wird wieder einmal deutlich, wie sehr der Anforderungscharakter einer Aufgabe von dem vorangegangenen Unterricht abhängt. Natürlich ist es unverzichtbar, die Schülerinnen und Schüler auf solche veränderten Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht angemessen vorzubereiten, und selbstverständlich können die bewährten Kurvendiskussionen nicht per Erlaß und über Nacht ersetzt werden. Aber unstrittig ist, daß es im Mathematikunterricht noch mehr als bisher darum gehen muß, die Bedeutung, Tragweite, Anwendbarkeit usw. der mathematischen Begriffe und Methoden zu vermitteln, und weniger darum, ein (Rechen-) Rezept souverän zu beherrschen – denn das kann der Taschencomputer besser!

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Erfahrung, die Mary BARNES im Rahmen eines Programms der australischen Regierung machen konnte: Gerade solche attraktiven Problemstellungen und Unterrichtsinhalte ermutigen die Mädchen, weiter Mathematik zu machen. Dies bestätigt die These, daß das, was gut für die Mädchen ist, auch gut für alle ist (vgl. auch HERGET 1992, S. 146-147 und EFFE-STUMPF).

Wenn wir den Bildungsauftrag der Schule ernst nehmen, dann müssen wir uns *jetzt* der Herausforderung durch Hardware und Software stellen. Dann gilt es, einen ersten kleinen Schritt schon in der nächsten Mathematik-Klassenarbeit bzw. -Klausur mit *einer einzigen* solchen „neuen" Aufgabe (unter mehreren „alten") zu versuchen – nicht immer, aber immer öfter!

Literatur

APPEL, Herbert: Neue Aufgaben – alte Aufgaben. In: HISCHER 1993, S. 103-104.

BARNES, Mary: Investigating Change: A gender-inclusive course in calculus. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 26(1994)2, S. 49-56.

EFFE-STUMPF, Gertrud (Hrsg.): Mädchen und Jungen im Mathematikunterricht. Mathematik lehren Heft 71/August 1995.

HENN, Hans Wolfgang: Aufgaben für den Computereinsatz im Mathematikunterricht – „Die alternative Abituraufgabe". In: HISCHER 1992, S. 124-125.

HERGET, Wilfried: Zeitungsausschnitte – Beiträge zu einem realitätsorientierten Mathematikunterricht. Praxis der Mathematik 28(1986)7, S. 385-397.

HERGET, Wilfried: Mathematikunterricht – wie geht es weiter? In: HISCHER 1992, S. 139-148.

HERGET, Wilfried: Mathe-(Klausur-)Aufgaben – einmal anders?! In: HISCHER 1993, S. 58-69.

HERGET, Wilfried: „Die alternative Aufgabe" – veränderte Aufgabenstellungen und veränderte Lösungswege mit/trotz Computersoftware. In: HISCHER 1994.

HERGET, Wilfried: Mathe-Aufgaben – einmal anders?! Mathematik lehren Heft 68/ Februar 1995, S. 64-66.

HERGET, Wilfried / WAGENFÜHR, Karin: OKIDOK! – Gleichungen 8. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1991/1995².

HISCHER, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung" von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Franzbecker, Hildesheim 1992.

HISCHER, Horst (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden. Franzbecker, Hildesheim 1993.

HISCHER, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht und Computer – neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen? Franzbecker, Hildesheim 1994.

MEYER, Jörg; WINKELMANN, Bernard: Prüfungsaufgaben trotz DERIVE™. In: HISCHER 1992, S. 126-127.

SCHMID, August: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Klett, Stuttgart o. J.

STEINBERG, Günter: Sanft krümmt sich, was ein Gleis werden will. Mathematik lehren Heft 69/April 1995, S. 61-64.

WINTER, Heinrich: Divergentes Denken und quadratische Gleichungen. Mathematik lehren Heft 28/1988, S. 54-55.

WUNDERLING, Helmut: Erfahrungen mit der Benutzung von Software (DERIVE™) im Mathematikunterricht. In: HISCHER 1992, S. 73-77.