BACK

Archimedes und DERIVE

Verfasser: StD Helmut Wunderling, Dahlemer Weg 84, 14167 BERLIN
Ausarbeitung des Vortrags auf der DDD95

1 Einleitung

Ein oft geäußerter Wunsch von Lehrern und Didaktikern der Mathematik ist das Einbeziehen historischer Elemente in den Unterricht, denn erst dadurch erhält sie - die Geisteswissenschaft schlechthin - ihren geistesgeschichtlichen Hintergrund. Die Verwirklichung dieses Wunsches scheitert sehr häufig: einmal an der Ausbildung von uns Mathematiklehrern und zum anderen an der fehlenden Zeit im Unterricht, denn die Mehrheit aller Lehrer, Schüler und Eltern hält dafür, daß es das Beherrschen des puren Stoffes ist, was unseren Schülern die Zensuren einbringt. Es gibt aber heute zwei Möglichkeiten, dem Zeitdruck auszuweichen und im Mathematikunterricht dem geisteswissenschaftlichen Anspruch ein wenig mehr gerecht zu werden, ohne das Können der Schüler zu "opfern".

Für die Analysis sind diese beiden Möglichkeiten:

a. Einsatz von Algebraprogrammen (CAS),

b. Nutzung der Hyperreellen Zahlen.

zu a. Dem Unterricht und immer mehr Schülern auch zu Hause stehen heute mächtige Hilfsmittel zur Verfügung. DERIVE ist ein solches Programm, das relativ wenig kostet, auf kleinsten PCs läuft und mehr "kann" als die Schulmathematik je braucht. Seit 7 Jahren nutze ich dieses Programm als legitimes Hilfsmittel im Unterricht bis hin im schriftlichen Abitur. Es steht fest: dadurch wird Unterrichtszeit gewonnen. Sie steht zur Verfügung für Gedanken in Köpfen, die sonst vom "Kleinkram" der technischen Umformungen ausgelastet waren.

zu b. Dem Analysisunterricht steht darüber hinaus heute das Hilfsmittel der hyperreellen Zahlen zur Verfügung. Mit ihm gelingt es, den Grenzwertstrapazen Herr zu werden. Seit 4 Jahren treibe ich Infinitesimal-Analysis in den Klassenstufen 11 bis 13. Auch hierdurch wird Unterrichtszeit gewonnen. Gerade diese "neue" Art des Umgangs mit der Infinitesimalmathematik fordert zur Besinnung auf die Gedanken der Altmeister heraus, die vor der Grenzwertzeit zu den Resultaten gelangten, die wir unseren Schülern heute übermitteln.

2 ARCHIMEDES (ca. 287 - 212 v.Chr.)

Die Quadratur eines krummlinig begrenzten Ebenenstücks, d.h. die Angabe eine Quadrates, das den selben Flächeninhalt wie das vorgelegte Ebenenstück hat, gehört zu den ältesten Problemen, mit denen sich die Menschheit befaßt hat. Insbesondere hat die Quadratur des Kreises das Interesse der Menschen derart erregt, daß es selbst heute, 112 Jahre nachdem Lindemann die Transzendenz von p erkannt hatte, immer noch "exakte Kreisquadratoren" gibt, die meinen, mit Zirkel nur und Lineal aus einem Kreis ein flächengleiches Quadrat hergestellt zu haben.

Wir mathematisch Ausgebildeten gehen natürlich gar nicht erst mehr an die Lösung dieses Problems, sondern wissen, daß sie in der Analysis bereitgestellt ist und integrieren einfach. "Einfach" heißt dabei heutzutage computergestützt.

DERIVE:

#1: $x^2 + y^2 = r^2$

#2: r :∈ Real [0, ∞)

#3: $\mathrm{SOLVE}(x^2 + y^2 = r^2, y)$

#4: $\left[y = \sqrt{r^2 - x^2},\ y = -\sqrt{r^2 - x^2}\right]$

#5: "oberer Halbkreis: √(r^2 - x^2)"

#6: Notation := Rational

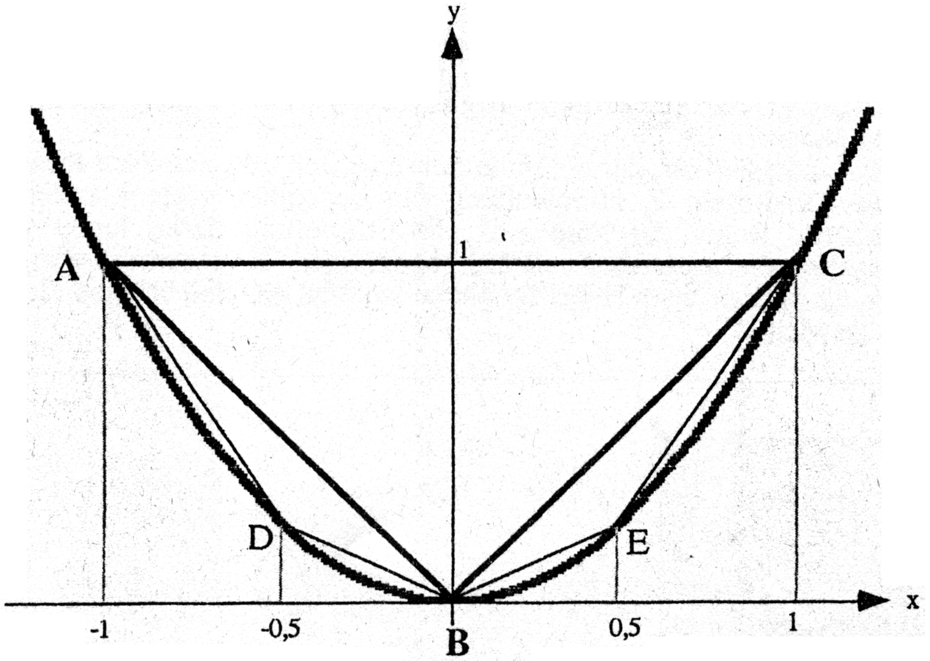
#7: $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

#8: $\dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$

Das geht schnell und der Mathematiker kann sich neuen Problemen zuwenden.

Nicht so der Mathematiklehrer mit seinen Schülern. Diese haben einen Anspruch darauf, zu erfahren, welche Geistesstärken - angesammelt in Jahrtausenden - sie mit diesen wenigen Tastenbewegungen zum Leben erwecken. Und es ist auch für uns faszinierend, den Spuren nachzugehen, die das Werden der Integralrechnung ausmachen.

Vor 2250 Jahren lebte in Syrakus ARCHIMEDES. Er ist der Vater der Integralrechnung. Bei ihm finden wir in vollendeter Klarheit die Vorgehensweise, die bis in unsere Tage zum Standard in der Analysis geworden ist. Seine Art der Erkenntnisfindung ist zweigeteilt, und wir wollen sie beleuchten, indem wir ARCHIMEDES bei seiner Quadratur eines beliebigen Parabelsegmentes begleiten.
In einem ersten Schritt bedient er sich einer Methode, die seinen Ansprüchen als Mathematiker zwar nicht genügt, die aber zum Ergebnis führt, daß der Flächeninhalt eines Parabelsegmentes 4/3 desjenigen eines Dreiecks ABC mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe ist. (Vgl. Abb.1)



(Abb. 1)

Der zweite Schritt sichert diese Erkenntnis ab, indem er ausschließt, daß der gesuchte Inhalt mehr bzw. weniger als dieses Ergebnis sein kann. Und dieser indirekte Beweis ist nichts anderes als unsere heutige "Epsilontik".
ARCHIMEDES' Ausschöpfen des Segments durch eine geometrische Folge von Dreiecken garantiert, daß |Segmentinhalt - 4/3 Dreiecksinhalt| mehr als null nicht sein kann, weil nämlich für jedes positive ε ein n gefunden werden kann, so daß

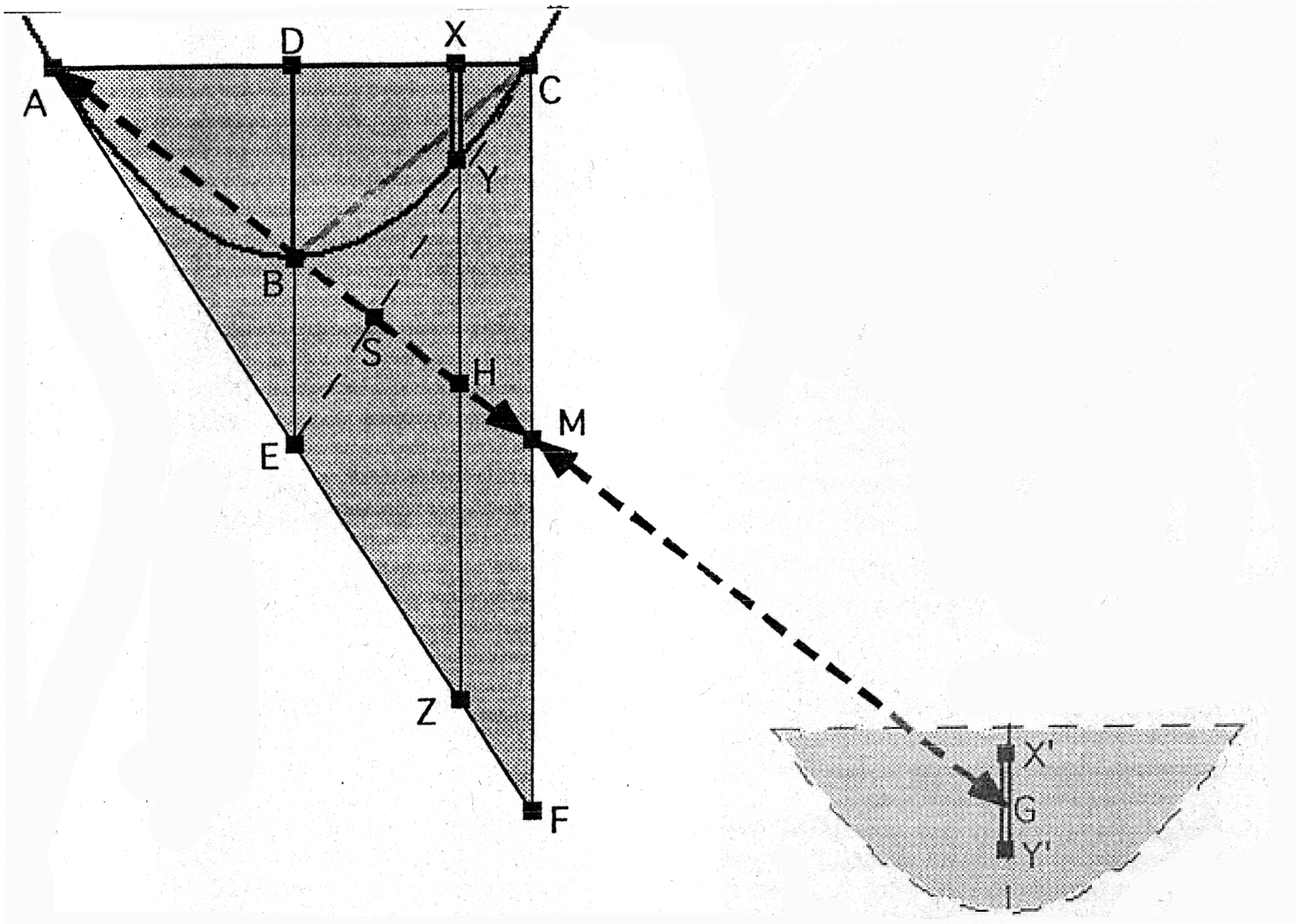
$$|\text{Segmentinhalt}(n) - 4/3 \text{ Dreiecksinhalt}| < \varepsilon.$$

Wir Mathematiklehrer kennen diese Argumentation zur Genüge und wissen, wie schwer sie von Schülern eingesehen, wie schwer sie von ihnen behalten und wie selten sie von manchen selbständig gehandhabt wird. Vor allem aber: sie ist nur der zweite Schritt im Erkenntnisprozeß und als solcher völlig wertlos ohne den ersten!

Das Geschick der Schriften des ARCHIMEDES ist dafür verantwortlich, daß die Nachfahren 2160 Jahre warten mußten, bis sie erfuhren, wie sein erster Schritt ausgesehen hat. Daß er ihn überhaupt dokumentiert hat, mag manchen von uns überraschen, die wir uns an einen "heuristischen Vorspann" im Geschäft der Analysis gewöhnt haben, der eh nicht zu unterrichten ist. ARCHIMEDES aber schreibt in seiner "Methode", die erst 1906 in Kairo auftauchte, an Eratosthenes:
"Bei einer früheren Gelegenheit sandte ich Dir einige der von mir gefundenen Lehrsätze, wobei ich nur die Sätze aufschrieb und Dich aufforderte, die vorläufig nicht angegebenen Beweise zu finden. ...
Die Beweise dieser Sätze habe ich also in diesem Buche ausgearbeitet und schicke sie Dir jetzt. ... habe ich es angebracht gefunden, in demselben Buche eine eigentümliche Methode niederzulegen und Dir auseinanderzusetzen, wodurch es Dir möglich sein wird, eine Anregung zur Untersuchung einiger mathematischer Fragen mit Hilfe der Mechanik zu gewinnen. Dieses Verfahren ist nach meiner Überzeugung auch für den Beweis der Sätze selbst nicht weniger nützlich, denn gewisse Dinge sind mir zuerst durch eine mechanische Methode klar geworden, mußten aber nachher geometrisch bewiesen werden, weil ihre Behandlung nach der genannten Methode keinen wirkliche Beweis liefert. Denn es ist

offenbar leichter, wenn wir durch die Methode einige Kenntnis von den Fragen gewonnen haben, den Beweis zu finden, als ihn ohne vorläufige Kenntnis zu finden."

Wie also ist ARCHIMEDES zu seinem Ergebnis für den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes gekommen?
Er war der erste große Mathematiker, der die reine Lehre verließ und sich auch technischen Problemen zuwandte. In diesem Zusammenhang fand er unter vielem anderen das Hebelgesetz, die goldene Regel der Mechanik. In Erinnerung daran legen wir die Pappausfertigung eines Parabelsegmentes und des zugehörigen Tangentendreiecks wie in Abbildung 2 auf einen als zweiarmigen Hebel fungierenden Stab AG und bringen die beiden Pappkörper ins Gleichgewicht.



(Abb. 2)

Ergebnis: Das Dreieck AFC ist etwa 3 mal so groß wie das Parabelsegment.
Nehmen wir hinzu, daß das Dreieck ABC 1/4 vom Tangentendreieck ist, so erkennen wir, daß Dreieck ABC 3/4 des Parabelsegmentes oder umgekehrt dieses 4/3 des Dreiecks sein muß.

ARCHIMEDES hat dieses physikalische Experiment nicht überliefert, wohl aber ein entsprechendes Gedankenexperiment.
Um dieses zu verstehen, müssen wir uns zunächst das Wissen verschaffen, das bei den Griechen zu seiner Zeit bestens bekannt war. Wir modellieren dazu Parabel, Sekante und Tangente in A durch Funktionsterme $p(x)$, $s(x)$ und $t_A(x)$ in DERIVE.

#1: $p(x) := k \cdot x^2$

#2: $s(x) := k \cdot (x \cdot (a + c) - a \cdot c)$

#3: $tA(x) := a \cdot k \cdot (2 \cdot x - a)$

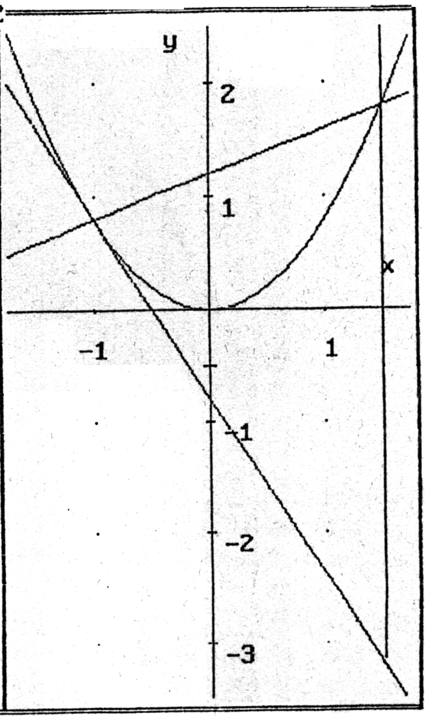
#6: "[p(x),s(x),tA(x),senkrechte]"

#7: "für k=0.8, a=-1, c=1.5"

#5: $\left[\frac{4 \cdot x^2}{5}, \frac{2 \cdot (x + 3)}{5}, -\frac{4 \cdot (2 \cdot x + 1)}{5}, \left[\frac{3}{2}\right.\right.$

#8: $\frac{s(x) - p(x)}{s(x) - tA(x)}$

#9: $\frac{x - c}{a - c}$



Zwischen den Punkten X : (x ; s(x)) einer Parabelsekante, Y : (x ; p(x)) der Parabel und Z : (x ; $t_A(x)$) der zugehörigen Tangente (Punkt-Bezeichnungen von Abb. 2) besteht demnach folgende Beziehung:

$$|\overline{XY}|:|\overline{XZ}| = (x-c):(a-c).$$

Per Strahlensatz überträgt sich das Verhältnis (x-c):(a-c) sowohl auf die Sekante AC als auch auf die Seitenhalbierende AM, nämlich $(x-c):(a-c) = |\overline{CX}|:|\overline{CA}| = |\overline{HM}|:|\overline{AM}|$.

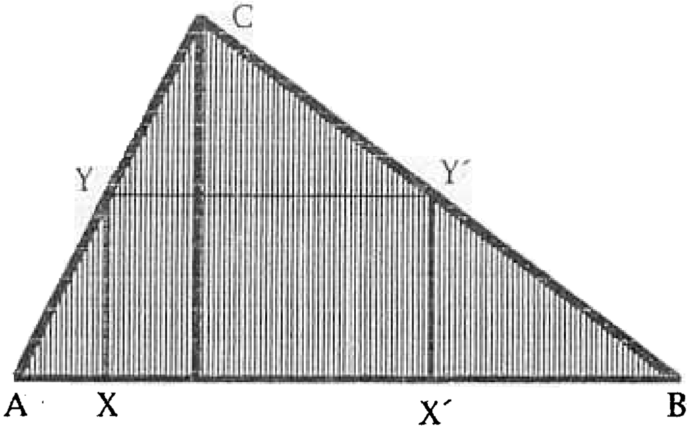
Insgesamt ergibt sich also $|\overline{XY}|:|\overline{XZ}| = |\overline{HM}|:|\overline{AM}|$, und hiervon geht Archimedes aus.
Verlängert man $\overline{AM}$ über M hinaus um sich selbst bis G, so ist $\overline{AG}$ der in M gelagerte ideelle Hebel und es gilt:

$$|\overline{XY}|:|\overline{XZ}| = |\overline{HM}|:|\overline{GM}| \quad \text{oder} \quad |\overline{XY}|\cdot|\overline{GM}| = |\overline{XZ}|\cdot|\overline{HM}|, \text{ das Hebelgesetz.}$$

Jede Strecke $\overline{XY}$ des Parabelsegmentes ist in G mit der entsprechenden Strecke $\overline{XZ}$ des Tangentendreiecks im Gleichgewicht; d.h. auch, daß das ganze Parabelsegment mit Schwerpunkt G dem Dreieck mit Schwerpunkt S die Waage hält. Von der Lage des Schwerpunkts S aber wissen wir, daß er die Entfernung 1/3 $\overline{MG}$ vom Drehpunkt M hat. Also ist das ungefähre Ergebnis unseres physikalischen Experiments präzisiert.

Wie wir gesehen haben, schätzte ARCHIMEDES seine Methode, Proportionen als Hebelgesetz zu interpretieren und Gleichgewichtsaussagen als Hinweis für Flächeninhalte zu nutzen, zwar genau so hoch ein wie den folgenden Beweis im 2. Schritt seines Vorgehens, aber er konnte ihr keinen Beweischarakter selbst zuerkennen. Der Grund war, daß er den unendlich vielen Strecken, die ununterteilbar - atomar - indivisibel - gedacht wurden, nicht trauen konnte.

In der Tat kann man mit dieser Vorstellung baren Unsinn "herleiten". Das Dreieck ABC (Abb. 3) wird durch seine Höhe sichtbar in zwei unterschiedlich große Teildreiecke zerlegt. Sie haben aber dennoch den selben Flächeninhalt, denn sie bauen sich jedes aus genau so unendlich vielen kongruenten Strecken $\overline{XY}$ bzw. $\overline{X'Y'}$ auf!



(Abb. 3)

Die Zuordnung von $\overline{XY}$ zu $\overline{XZ}$ bei ARCHIMEDES vermeidet zwar diese Schwierigkeit, dennoch konnte kein Gelehrter über die Lehre des Aristoteles hinaus, nach der es aktual unendlich viele Strecken gar nicht geben kann, höchstens potentiell ließ sich das Unendliche denken.
Erst Cavallieri (1598? - 1647) geht von den Indivisiblen ohne jede Breite ab und interpretiert sie infinitesimal, so daß sie mit infinitesimalen Quadraten gepflastert werden und damit zur Inhaltsbestimmung dienen können. Leibniz konnte intuitiv virtuos mit dem Konzept des Infinitesimalen umgehen, und Robinson gelang es 1961, dieses Konzept in eine logisch einwandfreie Form zu gießen, nachdem Bolzano und Cantor das Aktualunendliche in den Griff bekommen hatten.

Deshalb können wir heute allein mit dem ersten Schritt von ARCHIMEDES sicher zu seinem Ergebnis kommen.

1. Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks innerhalb eines Parabelsegmentes:
DERIVE:

#1: $\left[p(x) := k\cdot x^2,\ A := [a,\ p(a)],\ C := [c,\ p(c)]\right]$

#2: $B := \left[\dfrac{a + c}{2},\ p\left[\dfrac{a + c}{2}\right]\right]$

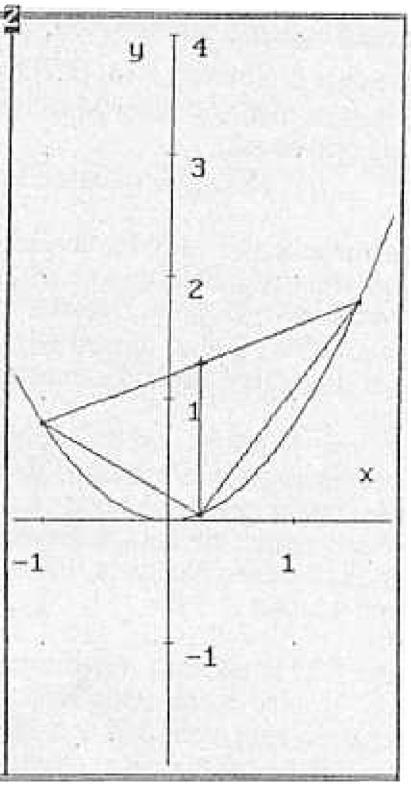
#3: $\left[H := \dfrac{A + C}{2},\ HB := \dfrac{p(a) + p(c)}{2} - p\left[\dfrac{a + c}{2}\right]\right]$

#4: $\text{Dreiecksinhalt} := \dfrac{1}{2}\cdot(c - a)\cdot HB = \dfrac{k\cdot(c - a)^3}{8}$

#5: "Zeichnung:"

#6: $[k := 0.8,\ a := -1,\ c := 1.5]$

#7: $[p(x),\ [A,\ H,\ B,\ H,\ C,\ B,\ A]]$



$\frac{4}{3}$ des Dreiecksinhalts ist demnach $\frac{k(c-a)^3}{6}$

---

2. Direkte Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegmentes als Summe infinitesimaler Streifen:

DERIVE:

$$\#1: \quad \left[p(x) := k \cdot x^2,\ s(x) := k \cdot (x \cdot (a + c) - a \cdot c),\ f(x) := s(x) - p(x)\right]$$

$$\#2: \quad \sum_{i=1}^{N} f(a + i \cdot dx) \cdot dx = - \frac{N \cdot dx^2 \cdot k \cdot (N + 1) \cdot (2 \cdot N \cdot dx + 3 \cdot a - 3 \cdot c + dx)}{6}$$

$$\#3: \quad N := \frac{c - a}{dx}$$

$$\#4: \quad \sum_{i=1}^{N} f(a + i \cdot dx) \cdot dx = \frac{k \cdot (a - c + dx) \cdot (a - c - dx) \cdot (c - a)}{6}$$

$$\#5: \quad RT\left[\frac{k \cdot (a - c + dx) \cdot (a - c - dx) \cdot (c - a)}{6}, dx\right] = \frac{k \cdot (c - a)^3}{6}$$

Der Inhalt $\frac{k(c-a)^3}{6}$ des Parabelsegmentes ist also $\frac{4}{3}$ des Dreiecksinhalts

---

Diese zweite direkte Nutzung der Zerlegungsidee von ARCHIMEDES führt nicht etwa zu einer ungereimten Zauberei mit erstaunlich richtigem Ergebnis, vielmehr spielt sich die Rechnung in der Welt der hyperreellen Zahlen ab, in der es hypernatürliche Zahlen N (griechisch groß NÜ) gibt, die größer sind als jede übliche natürliche Zahl. Daher wird die Streifenbreite dx infinitesimal, also kleiner als jede positive reelle Zahl und dennoch größer als null. Die Summe kann nach den üblichen Regeln der endlichen Summen berechnet werden, weshalb auch Algebraprogramme wie DERIVE eingesetzt werden können. Und nun wird nicht etwa dx=0 gesetzt, sondern es wird aus der hyperreellen Welt in die der normalen reellen Zahlen zurückgekehrt, in der ja das Quadraturproblem gestellt war. Diese Rückkehr leistet eine Abbildung RT, die jeder finiten hyperreellen Zahl ihren reellen Teil zuordnet, den man tatsächlich durch Weglassen der infinitesimalen Anteile des hyperreellen Resultats erhält.

Diese bequeme einschrittige Methode macht den für sich genommenen wertlosen zweiten Schritt der Epsilontik überflüssig. Es ist das Verdienst von Laugwitz, Robinson u.a. durch die Einführung hyperreeller Zahlen einen Typ unendlicher Mengen - den hyperfiniten oder *endlichen Mengen - isoliert zu haben, die sich wie endliche Mengen verhalten. Integrale werden unendliche Summen, die immer existieren, und im Falle finiter Ergebnisse stimmen die reellen Teile mit den Grenzwert-Integralen überein.

Wegen dieser Übereinstimmung läßt sich die Funktion "Reeller Teil" wie folgt in DERIVE nachbilden: RT(Term, xx) := LIM(Term, xx, 0, 0) .