BACK

Geometrische Beweise mit dem PC

Arthur Engel, Universität Frankfurt a. M.

8. Juni 1995

Zusammenfassung

Große Systeme für algebraische Manipulation wie *Mathematica, Maple* (für PC's) oder gar *Axiom* (für Workstations) können automatisch geometrische Sätze beweisen, *die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen.* Dies sind fast alle Sätze der Schulgeometrie. Beispiele automatischer Beweise. Was kann ein kleines System wie *Derive* leisten ?

Es ist klar, daß *Derive* die analytische Geometrie und lineare Algebra der S2 radikal vereinfacht. Auch die "altmodische" analytische Geometrie der Kegelschnitte wird durch *Derive* ganz wesentlich vereinfacht.

1 Ein umfangreiches Beispiel aus der Elementargeometrie

Unter Geometrie wollen wir in dieser Arbeit die elementare Geometrie der S1 verstehen, etwa verkörpert durch die Dreiecksgeometrie. Ich nahm mir Coxeters *Introduction to Geometry (1961)* vor. Gleich im 1. Kapitel fand ich einen eleganten Abriß der Dreiecksgeometrie bis zum Satz von Morley. Auf Seite 16 fiel mein Augenmerk auf Aufgabe 10, die offensichtlich die Form einer Gleichung hat. Sie lautet

Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn $2R + r = s$ ist.

Hier sind R, r, s jeweils der Umkreisradius, der Inkreisradius, und der halbe Umfang. Die Rechtwinkligkeit muß noch durch eine Gleichung ausgedrückt werden. Es besteht kein Grund von der üblichen Notation abzuweichen. Mit `Option Input` stellen wir den `Character Sensitive Mode` ein und erreichen dadurch, daß große Buchstaben erkannt werden.

Ein Dreieck mit den Seiten a, b, c ist genau dann rechtwinklig, wenn $a^2 = b^2 + c^2$ oder $b^2 = c^2 + a^2$, oder $c^2 = a^2 + b^2$ ist. Dies ist gleichwertig mit der Gleichung

$$(a^2 - b^2 - c^2)(b^2 - c^2 - a^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0. \tag{1}$$

Wir müssen die Gleichwertigkeit von (1) mit

$$2R + r = s$$

nachweisen. Dabei wollen wir nur Sätze verwenden, die jedem Schüler vertraut sind:

1. Der 1. Flächensatz $A = rs$ aus den Anfängen der S1, oder

$$r = \frac{A}{s} \tag{3}$$

2. Der Flächensatz vom Ende der S2

$$2A = bc \sin\alpha \tag{4}$$

3. Der Sinussatz

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} \tag{5}$$

Durch Multiplikation von (4) und (5) ergibt sich $4AR = abc$ oder

$$2R = \frac{abc}{2A}. \tag{6}$$

Setzt man (3) und (6) in (2) ein, so ergibt sich

$$\frac{abc}{2A} + \frac{A}{s} = s. \tag{7}$$

Wir wollen zunächst die unrealistische Annahme machen, daß die Schüler die Heronsche Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks kennen, d.h.

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Durch Multiplikation von (7) mit $2A$ ergibt sich dann

$$abc + 2(s-a)(s-b)(s-c) = 2s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Spätestens ab hier wird mit *Derive* gearbeitet. Am besten ist es natürlich die ganze Rechnung Derive zu überlassen. Dies verhindert Flüchtigkeitsfehler.

1 : $abc + 2(s-a)(s-b)(s-c) = 2s\surd(s(s-a)(s-b)(s-c))s \leftarrow (a+b+c)/2$, Ctrl-J

2 : ein ganz langer Ausdruck in a, b, c. #2^2

3 : ein noch größerer Ausdruck in a, b, c mit dem Hauptnenner 16. #3 16, Ctrl-J

4 : ein rationaler Ausdruck mit Klammern. E, Ctrl-J

5 : Eine klammerfreie Gleichung. #5-RHS(#5),

6 : Eine Gleichung $f(a, b, c) = 0$ mit dem Faktor 2. #6 /2, Ctrl-J

7 : $a^6 - a^4b^2 - a^4c^2 - a^2b^4 + 2a^2b^2c^2 - a^2c^4 + b^6 - b^4c^2 - b^2c^4 + c^6 = 0$ (9)

Wir hoffen, daß dies mit (1) gleichwertig ist. Durch den Befehl `Factor` liefert mein 50 MHZ 486-er in 250 Sekunden

$$(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Dies ist in der Tat (1), allerdings mit einem gewaltigen Rechenaufwand. Im Faktorisieren ist *Derive* 1000mal langsamer als seine Konkurrenten *Mathematica* oder *Maple*. Hier gibt es noch Verbesserungsmöglichkeiten. Wir können die Arbeit wesentlich vereinfachen durch die Bemerkung, daß in (1) die positiven Variablen a, b, c nur quadratisch vorkommen. Durch die Setzung $a \leftarrow \sqrt{x}$, $b \leftarrow \sqrt{y}$, $c \leftarrow \sqrt{z}$ in (9) erhält man die Gleichung

$$x^3 - x^2y - x^2z - xy^2 + 2xyz - xz^2 + y^3 - y^2z - yz^2 + z^3 = 0.$$

Der Befehl `Factor` liefert in weniger als einer Sekunde

$$(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) = 0.$$

Man kann noch einfacher $(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 \quad b^2) = 0$ durch den Befehl `Expand` in 0.1 Sekunden ausmultiplizieren und erhält (9).

Wir wollen nun keine Trigonometrie und keine Heron-Formel voraussetzen, lediglich etwas Ähnlichkeit. Dies ist schon wesentlich realistischer.

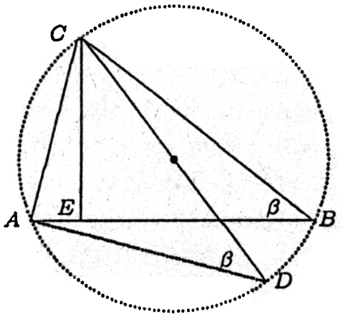

Fig. 1

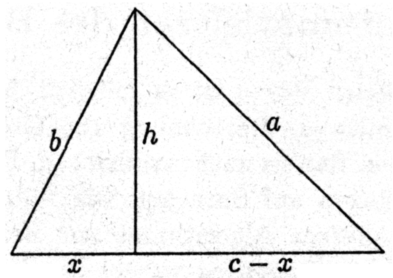

Fig. 2

In Fig. 1 sind die rechtwinkligen Dreiecke CAD und CEB ähnlich, da sie in den spitzen Winkeln bei B und D übereinstimmen (Satz vom Umfangswinkel). Wegen $|CD| = 2R$ gilt

$$\frac{b}{2R} = \frac{h_c}{a} \iff ab = 2Rh_c \iff abc = 2Rch_c \iff abc = 4AR.$$

D.h.,

$$2R = \frac{abc}{2A}.$$

Damit geht (2) über in

$$\frac{abc}{2A} + \frac{A}{s} = s,$$

oder

$$abc + \frac{2A^2}{s} = 2As.$$

Nun wollen wir den Inhalt A durch a, b, c ausdrücken. In Fig. 2 gilt

$1: \; b^2 = h^2 + x^2$

$2: \; a^2 = h^2 + (c - x)^2$ #1 - #2, Ctrl-J

$3: \; b^2 - a^2 = -c^2 + 2cx$ L

$4: \; x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$

$5: \; h^2 = b^2 - x^2$ $\quad$ M, S, $x \leftarrow RHS(\#4)$, Ctrl-J

Nach einem Factor-Befehl ergibt sich

$6: \; h^2 = \dfrac{(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2}$ #6 $c^2/4$, Ctrl-J

$7: \; \dfrac{c^2h^2}{4} = \dfrac{(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{16}$

Dies ist A^2. Nun wird A in (10) eingesetzt und im zweiten Summanden mit s gekürzt. Man erhält

$$abc + \frac{(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4} = \frac{(a + b + c)}{4}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}$$

Damit sind wir wieder bei (8) angelagt, ja sogar einen Schritt weiter, s ist eliminiert. Quadrieren dieser Gleichung mit anschließender Vereinfachung führt wieder zu (9).

2 Automatisieren des Beweises

Mit *Gröbner Basen* ist es möglich den Beweis zu automatisieren. *Derive* besitzt keinen Algorithmus zur Berechnung von Gröbner Basen. Daher sind wir gezwungen Schritt für Schritt den Beweis nachzuvollziehen. Für Schüler ist dies eher ein Vorteil. Ein Mathematiker kann dagegen auf Sprachen wie *Mathematica, Maple, Reduce, Axiom* zurückgreifen, die den Buchberger Algorithmus zur Berechnung von Gröbner Basen implementiert haben. Z. B., in *Mathematica* verwenden die Funktionen **Eliminate, Solve, AlgebraicRules** den Buchberger Algorithmus. Dies ist ein wesentlicher Fortschritt, aber leider hat dieser Algorithmus *exponentielle Rechenzeit.* Sehr tiefe Probleme lassen sich nicht lösen.

Wir wollen mit der Mathematica Funktion **Eliminate** unser Problem automatisch lösen. Wir müssen allerdings beachten, daß Mathematica Dreiecke nicht kennt. Die ersten sechs Gleichungen dienen dazu das notwendige Rüstzeug beizubringen. Die letzte Gleichung ist der zu beweisende Satz.

In[1]:=Eliminate[$\{b^2 == h^2 + x^2,\ \ a^2 == h^2 + (c-x)^2,\ \ c\,h == 2\,A,\ \ 2\,s == a + b + c,$ $a\,b == 2\,R\,h,\ \ A == r\,s,\ \ 2\,R + r == s\}, \{R, r, A, h, s, x\}$]

Out[1]:= $a^6 + a^4(-b^2 - c^2) + a^2(-b^4 + 2b^2\,c^2 - c^4) == -b^6 + b^4\,c^2 - b^2\,c^4 + c^6$

$Factor[a^6 - a^4b^2 - a^4c^2 - a^2b^4 + 2\,a^2b^2c^2 - a^2c^4 + b^6 - b^4c^2 - b^2c^4 + c^6]$

$Out[2] := (-a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)$

Einschließlich des Faktorisierens benötigt Mathematica für den Beweis knapp 13 Sekunden. Das Faktorisieren (0.38 Sekunden), ist fast tausendmal schneller als bei Derive.

Beim schrittweisen Beweis mit Derive konnten wir uns überzeugen, daß jeder Schritt reversibel ist. Auch Quadrieren ist bei positiven Zahlen reversibel! Daher konnte der Kehrsatz mitbewiesen werden. Beim automatischen Beweis mit Mathematica können wir nicht erkennen, ob jeder Schritt reversibel ist. Daher sind wir gezwungen den Kehrsatz getrennt zu beweisen. Der nachfolgende Beweis dürfte nun ohne Kommentar verständlich sein.

In[1]:=Eliminate[$\{b^2 == h^2 + x^2,\ \ a^2 == h^2 + (c-x)^2, c\,h == 2A,\ \ 2s == a + b + c,$ $a\,b == 2R\,h,\ \ A == r\,s,\ \ (a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) == 0\}, \{a, b, c, A, h, x\}$]

$Out[1] := r^4s^2 + 4r^3s^2R + r^2s^2(-s^2 + 4R^2) == 0$

$In[2] := Factor[r^4s^2 + 4r^3Rs^2 + 4R^2r^2s^2 - r^2s^4]$

$Out[2] := r^2(r + 2R - s)s^2(r + 2R + s)$

Daraus folgt $2R + r = s$. Die ganze Rechnung erforderte 9.5 Sekunden. Also ist der Kehrsatz auch mit Mathematica leichter zu beweisen.

3 Bekannte und unbekannte Sätze der Dreiecksgeometrie

Wir wollen nun den Beweis vieler bekannter und unbekannter geometrischer Sätze skizzieren. Prototyp soll der folgende bekannte Satz sein:

Der Schwerpunkt S, der Umkreismittelpunkt M und der Höhenschnittpunkt H liegen auf einer Geraden, der Eulerschen Geraden. Dabei is $HS = 2SM$.

Dazu wollen wir *Trilinearkoordinaten* einführen, das sind die Abstände x, y, z von den Seiten a, b, c. Es kommt nur auf das Verhältnis $x : y : z$ an. Für den Schwerpunkt S gilt

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma}$$

Dies folgt aus $x = h_a/3$, $y = h_b/3$, $z = h_c/3$ und

$$h_a = \frac{2A}{a}, h_b = \frac{2A}{b}, h_c = \frac{2A}{c},$$

sowie dem Sinussatz. Fig. 3 zeigt, daß für die Koordinaten des Umkreismittelpunkts M gilt

$$x = R\cos\alpha,\ y = R\cos\beta,\ z = R\cos\gamma.$$

Also ist $x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Fig. 4 entnimmt man für den Höhenschnittpunkt H

$$\frac{x}{CH} = \cos\beta, \quad \frac{y}{CH} = \cos\alpha, \quad x : y = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta}$$

D.h.,

$$x : y : z = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}.$$

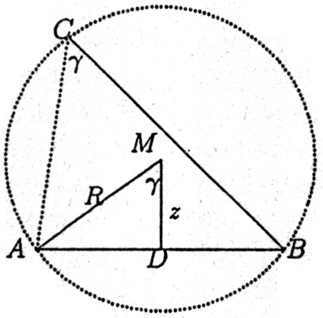

Fig. 3

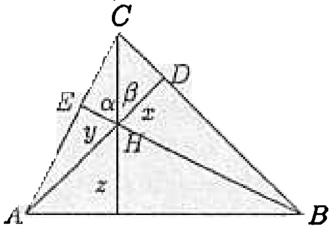

Fig. 4

Eine Gerade durch die Punkte $(x_1, y_1, z_1$ und (x_2, y_2, z_2) hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Um zu zeigen, daß die Punkte S, M, H auf einer Geraden liegen, braucht man nur nachzuprüfen, daß die Determinante der Matrix

$$1: \quad \begin{matrix} \frac{1}{\sin\alpha} & \frac{1}{\sin\beta} & \frac{1}{\sin\gamma} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{1}{\cos\alpha} & \frac{1}{\cos\beta} & \frac{1}{\cos\gamma} \end{matrix} \qquad M, S, \gamma \leftarrow \pi - \alpha - \beta, \quad \text{Ctrl-J}$$

verschwindet, nachdem γ durch $\pi - \alpha - \beta$ wird.

$$2: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\alpha} & \frac{1}{\sin\beta} & \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)} \\ \cos\alpha & \cos\beta & -\cos(\alpha+\beta) \\ \frac{1}{\cos\alpha} & \frac{1}{\cos\beta} & -\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)} \end{pmatrix} \qquad \det(\#2), \quad \text{Ctrl-J}$$

Es ergibt sich ein komplizierter trigonometrischer Ausdruck. `Manage Trigonometry Expand` liefert in einer Sekunde den Wert 0. Wir beseitigen alle Brüche und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

Zuerst wird γ durch $\pi - \alpha - \beta$ ersetzt. `Manage, Trigonometry, Collect` liefert dann für ihre Determinante in 0.2 Sekunden den Wert 0.

Am besten ist es mit dem Sinus- und Kosinussatz alle Winkel durch Seiten zu ersetzen. Werden die Brüche gelassen, so benötigt *Derive* 0.5 Sekunden. Werden noch die Brüche beseitigt, so benötigt man nur 0.2 Sekunden. Im letzten Fall wird die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} bc & ac & ab \\ a(b^2+c^2-a^2) & b(c^2+a^2-b^2) & c(a^2+b^2-c^2) \\ bc(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) & ac(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) & ab(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2) \end{pmatrix}$$

berechnet, und das ist ein Polynom in a, b, c. *Derive* kann besonders leicht bestimmen, ob es sich um das Nullpolynom handelt.

Vor einigen Jahren hat Clark Kimberling von der Universität Evanstone/Illinois verschiedene Zentren für Dreiecke eingeführt durch die Bedingung

$$x = f(a,b,c), \quad y = f(b,c,a), \quad z = f(c,a,b),$$

wobei $f(a,b,c)$ homogen in a, b, c und symmetrisch in den beiden letzten Variablen ist. Fast alle bisher bekannten Zentren, wie Inkreismittelpunkt, Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Nagelpunkt, Lemoine-Punkt und an die dreißig weiterer haben diese Eigenschaft. Nur zwei Punkte haben sie nicht, der erste und der zweite *Brokard-Punkt.* Er hat dabei neue Zentren erfunden, so daß die Zahl der Zentren auf 101 stieg. Inzwischen hat er zahlreich weitere Zentren eingeführt. Er begann mit dem Computer verschiedene Kollinearitäten der Zentren zu untersuchen und hat festgestellt, daß diese Zentren die Tendenz haben auf wenigen Geraden zu liegen. Er hat dabei zahllose neue Sätze gefunden, so daß die Anzahl der Sätze mehr als verdoppelt wurde. Alles wurde mit dem Computer entdeckt, indem er alle mögichen Tripel von Zentren durchging und auf zehn Stellen genau nachprüfte, ob sie kollinear sind. 101 beliebig gewählte Punkte bestimmen 5050 Geraden. Aber die 101 Zentren liegen auf 131 verschiedenen Geraden. Einen Rekord stellt die Eulersche Gerade dar. Auf ihr liegen 15 Zentren.

Wir wollen noch ein schwierigeres Beispiel betrachten von dem mir eine elementargeometrische Lösung nicht bekannt ist.

Der *Fermat-Punkt* eines Dreiecks mit $\max(\alpha,\beta,\gamma) < 120°$ ist der Punkt F mit minimaler Distanzsumme zu den Ecken. Man zeigt leicht, daß $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$ gilt.

Der *1. Napoleon-Punkt* N_1 wird wie folgt definiert: Errichte auf den Seiten a, b, c nach außen reguläre Dreiecke. Verbinde ihre Zentren X, Y, Z mit den Gegenecken durch die Strecken XA, YB, ZC. Dann schneiden sich XA, YB, ZC im 1. Napoleon-Punkt.

Satz. Die Gerade FN_1 geht durch den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC.

Sobald man diese Tatsache beobachtet hat, ergibt sich ein Beweis durch eine Routine-Rechnung, die aber mit der Hand fast nicht zu schaffen ist. Man bestimmt die Trilinearkoordinaten dieser Punkte:

$$F: \quad \frac{1}{\sin(\alpha+\pi/3)}, \quad \frac{1}{\sin(\beta+\pi/3)}, \quad \frac{1}{\sin(\gamma+\pi/3)}.$$

$$N_1: \quad \frac{1}{\sin(\alpha+\pi/6)}, \quad \frac{1}{\sin(\beta+\pi/6)}, \quad \frac{1}{\sin(\gamma+\pi/6)}.$$

$$M: \quad \cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma.$$

Wir müssen jetzt beweisen, daß

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sin(\alpha+\pi/3)} & \frac{1}{\sin(\beta+\pi/3)} & \frac{1}{\sin(\gamma+\pi/3)} \\ \frac{1}{\sin(\alpha+\pi/6)} & \frac{1}{\sin(\beta+\pi/6)} & \frac{1}{\sin(\gamma+\pi/6)} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ist. *Derive* gelingt es nicht, dies direkt zu beweisen. Aber auch *Mathematica* scheitert. Wir wollen vorher die Nenner beseitigen, indem wir die erste und zweite Zeile mit den jeweiligen Hauptnennern multiplizieren. Dann ersetzen wir γ durch $\pi-\alpha-\beta$. Auch dies hilft noch nicht. Wir müssen vorher mit `Manage, Trigonometry` die richtigen Einstellungen treffen. Zuerst `Collect`, dann `Expand` bestätigt die Gleichheit in $0.4+0.3=0.7$ Sekunden reiner Rechenzeit. Zuerst `Expand`, dann `Collect` schafft es in $3.1+0.6=3.7$ Sekunden.
Bei trigonometrischen Umformungen ist *Derive* seinen Konkurrenten überlegen!

Der *2. Napoleon-Punkt* N_2 ist wie der erste definiert, nur werden die regulären Dreiecke nach innen statt nach außen errichtet. Für die 1. Trilinearkoordinate von N_2 gilt

$$x = \frac{1}{\sin(\alpha-\pi/6)}.$$

Die anderen ergeben sich durch zyklische Vertauschung. Es gilt der Satz, daß FN_2 durch den Mittelpunkt des Neun-Punkte Kreises geht. Für dieses Zentrum gilt

$$x=\cos(\beta-\gamma), \quad \text{oder} \quad x=\cos\alpha+2\cos\beta\cos\gamma, \quad \text{oder} \quad x=bc\left(a^2b^2+a^2c^2+(b^2-c^2)^2\right).$$

Es sei dem Leser überlassen nachzuweisen, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen. Mit `Collect` dauerte bei mir die Rechnung 0.3 Sekunden, nachdem ich mit den Hauptnennern der beiden ersten Zeilen multipliziert und γ duch $\pi-\alpha-\beta$ ersetzt habe. Für das Zentrum des Neun-Punkte Kreises habe ich $x=\cos\alpha+2\cos\beta\cos\gamma$ gewählt. Es ist ziemlich sicher, daß ein elementargeometrischer Beweis noch nicht gefunden wurde.

Durch eine Stichprobe von 20 komplizierten Sätzen habe ich den Einduck gewonnen, daß die vielen Hunderte oder gar Tausende von neuen Sätzen, die Clark Kimberling beobachtet hat auch mit *Derive* bewiesen werden können. Bis auf ganz wenige dieser Sätze fehlen noch die elementargeometrischen Beweise. Die erste Publikation von Kimberling findet man in [1]. Dort sind auch die Trilinearkoordinaten der 101 Zentren, und die Koordinaten von 13 weiteren später entdeckten (erfundenen) Zentren aufgelistet. Viele dieser Sätze sind nicht einmal mit *Derive* oder *Mathematica* bewiesen. Dies wird jedoch später nachgeholt.

Zum Schluß definieren wir wenigstens eines der neuen Zentren, das 1986 bei einer Konferenz über Computer und Mathematik an der Philips-Exeter Academy gefunden wurde. Es ist der Exeterpunkt E mit $x=a(b^4+c^4-a^4)$. Er ist wie folgt definiert. Zeichne den Umkreis des Dreiecks ABC. Lege in A, B, C die Tangenten an den Umkreis. Sie bestimmen das Dreieck $A'B'C'$. Sei A'' der Schnittpunkt der Schwerlinie von A aus mit dem Umkreis. Analog sind B'' und C'' definiert. Dann gehen die Geraden $A'A''$, $B'B''$ und $C'C''$ durch einen Punkt E, den Exeterpunkt. Dem Leser sei empfohlen mit *Derive* zu beweisen, daß E auf der Eulergeraden liegt.

4 Mathematica löst ein Olympiadeproblem

Kann Mathematica Olympiadeprobleme lösen ? Dazu betrachten wir folgendes Problem der 18. Allunionsolympiade 1984.

Die positiven Zahlen x, y, z erfüllen das Gleichungssystem

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Berechne $xy + 2yz + 3zx$.

Von einer Schülerlösung besitze ich ein Protokoll. Der Schüler schreibt:

1. Als erstes fiel mir auf 9, 16, 25. Dies ist das „ägyptische Dreieck“ $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es könnte ein Hinweis auf Pythagoras, Geometrie sein.
2. Statt x, y, z ist nur $xy + 2yz + 3zx$ verlangt. Dies könnte eine Fläche sein. Vielleicht sogar die Fläche 6 des ägyptischen Dreiecks.
3. $\frac{y^2}{3}$ kommt zweimal vor. Ich setze $t^2 = \frac{y^2}{3}$. Dadurch kann ich alle drei Gleichungen mühelos geometrisch deuten.

$x^2 + \sqrt{3}xt + t^2 = 25, \quad t^2 + z^2 = 9, \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$

Die erste und dritte Gleichung nehmen die Form des Kosinussatzes an:

$$x^2 + t^2 - 2xt\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos 150^\circ} = 25, \qquad z^2 + x^2 - 2zx\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\cos 120^\circ} = 16.$$

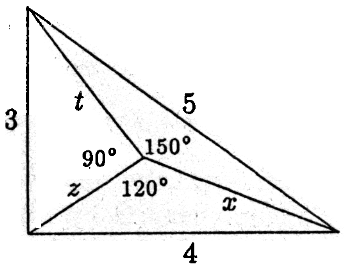

Fig. 5

Fig. 5 zeigt, daß die Deutungen passen. Für den Inhalt dieses Dreiecks gilt

$$6 \quad \frac{1}{4}xt + \frac{tz}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}zx.$$

Andererseits ist

$Q = xy+2yz+3zx = xt\sqrt{3}+2\sqrt{3}tz+3zx = 4\sqrt{3}\cdot 6 = 24\sqrt{3}.$

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein geometrisches Problem, das wir versuchen mit Mathematica automatisch zu lösen. Wir werden zu oft eingreifen müssen, so daß von einer automatischen Lösung kaum gesprochen werden kann.

In[1]:=ar=AlgebraicRules[$\{x^2 + x\ y + y^2/3 == 25, y^2/3 + z^2 == 9, z^2 + z\ x + x^2 == 16\}, \{x, y, z\}$];

Es wird versucht nach x, y, z aufzulösen. Dies wird nicht ganz gelingen, da der Gröbner Basis Algorithmus nur rationale Operationen verwendet. Aber es wird uns gelingen x und y zu eliminieren.

In[2]:=$xy + 2yz + 3zx$ /. ar (/. wird gelesen: Unter der Bedingung)

Out[2]=$91 - \frac{6553z^2}{432}$

Wir versuchen nach x, y, z aufzulösen.

In[3]:=m=Solve[$\{x^2+x\ y+y^2/3 == 25, y^2/3+z^2 == 9, z^2+z\ x+x^2 == 16\}, \{x, y, z\}$];

Wir unterdrücken wieder den umfangreichen Ausdruck. Wir bemerken jedoch, daß die vierte Lösung nur positive Koordinaten enthält und $m[[4,2]]$ ist z.

In[4]:=91 − 6553z^2/432 /. $m[[4,2]]$

Out[4]=24 $Sqrt[3]$

5 Derive hat Mühe bei einem Problem von Hofstadter

Ganz kürzlich hat sich Douglas Hofstadter (Indiana University) das geometrische Zeichenprogramm *The Geometer's Sketchpad* gekauft und begann zu experimentieren. Ausgangspunkt war der Satz von Morley (Die äußeren Trisektrissen eines Dreiecks schneiden sich in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.) Er versuchte diesen Satz zu verallgemeinern. Dazu definierte er die r-sektrissen der Winkel β und γ wie folgt: Für eine beliebige reelle Zahl r legte er in B an BC den Winkel $r\beta$ und in C an CB den Winkel $r\gamma$ an, und zwar nach innen oder außen, je nachden r positiv oder negativ war. Die beiden Strahlen schnitten sich in A_r. Analog definierte er die Punkte B_r und C_r. Leider war $\triangle A_rB_rC_r$ für $r \neq \frac{1}{3}$ nie gleichseitig. Aber er entdeckte etwas Neues: Die Geraden AA_r, BB_r und CC_r gingen durch einen Punkt H_r. So erhielt er die unendliche Familie der *Hofstadter Punkte*. Unter diesen kommen einige bekannte Punkte vor: Der Morley-Punkt $H_{\frac{1}{3}}$, der Inkreismittelpunkt $H_{\frac{1}{2}}$, der Umkreismittelpunkt H_2, der Höhenschnittpunkt H_{-1}, u.a.m. Für die Trilinearkoordinaten von H_r ergab sich

$$x_r : y_r : z_r = \frac{\sin r\alpha}{\sin(1-r)\alpha} : \frac{\sin r\beta}{\sin(1-r)\beta} : \frac{\sin r\gamma}{\sin(1-r)\gamma}.$$

Er definierte noch H_0 und H_1 als Grenzwerte für $r \to 0$ und $r \to 1$ und erhielt

$$H_0 = x_0 : y_0 : z_0 = \frac{\alpha}{\sin\alpha} : \frac{\beta}{\sin\beta} : \frac{\gamma}{\sin\gamma}, \quad H_1 = \frac{1}{x_0} : \frac{1}{y_0} : \frac{1}{z_0}.$$

Man kann eine unendliche Familie von Kollinearitäten geometrisch beweisen: *Die Punkte H_r, H_2 und H_{2-r} sind kollinear.* Ich konnte diesen Satz mit Derive nicht beweisen, da ich bis jetzt mit `Manage Trigonometry Collect/Expand` durchgekommen bin. Hier ging dies nicht mehr so einfach. Herr Dr. Koepf hat mir mehrere Lösungen angegeben. Die effizienteste geht so: Zuerst wird die Determinante mit `Manage Trigonometry Auto, Towards Auto` und `Factor Trivial` vereinfacht und dann mit der neuen Einstellung `Manage Trigonometry Collect, Towards Sines` nochmals vereinfacht. Man erhält in 0.6 Sekunden den Wert 0.

6 Derive löst eine schwierige geometrische Ungleichung

Bei der Allrussischen Olympiade 1994 kam folgende Ungleichung vor:

Ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und den Längen der Schwerlinien s_a, s_b, s_c hat den Umkreisdurchmesser D. Beweise, daß

$$\frac{a^2+b^2}{s_c} + \frac{b^2+c^2}{s_a} + \frac{c^2+a^2}{s_b} \leq 6D.$$

Ich habe diese Aufgabe beim Training unserer Mannschaft Ende Mai 1995 in Oberwolfach gestellt. Von 14 Schülern haben sie nur zwei ganz gelöst und einer hat einen Rechenfehler gemacht. D.h., wir haben es mit einer ganz schwierigen Aufgabe zu tun. Es wird allgemein angenommen, daß geometrische Ungleichungen nicht mit dem Computer gelöst werden können. Wir werden zeigen, daß dies nicht immer zutrifft. Unsere Strategie wird es sein $(a^2+b^2)/s_c \leq 2D$ zu beweisen, indem wir diese Ungleichung auf die Form $x^2 \geq 0$ bringen. Wir wissen bereits, daß $2D = 4R = abc/A$ ist. Wir müssen noch s_c durch a, b, c ausdrücken. Dazu verwenden wir den Satz

In einem Parallelogramm ist die Summe der Diagonalenquadrate gleich der Summe der Seitenquadrate. (Siehe Fig. 6.)

Dies kann man z.B. mit dem Kosinussatz beweisen. Man erhält $4s_c^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$. Damit ergibt sich

$$\frac{abc}{A} \geq \frac{2a^2+2b^2}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \iff \frac{abc}{A} - \frac{2a^2+2b^2}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \geq 0 \iff \frac{a^2b^2c^2}{A^2} - \frac{4(a^2+b^2)^2}{2a^2+2b^2-c^2} \geq 0.$$

Hier müssen wir noch A^2 durch $(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)/16$ ersetzen. Multipliziert man mit dem Hauptnenner und läßt ≥ 0 weg, so ergibt längere Rechnung

$$a^8 - 2a^6c^2 - 2a^4b^4 + 2a^4b^2c^2 + a^4c^4 + 2a^2b^4c^2 - 2a^2b^2c^4 + b^8 - 2b^6c^2 + b^4c^4.$$

Schließlich wenden wir den `Factor` Befehl auf den letzten Ausdruck an und erhalten

$$(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)^2.$$

Der letzte Term ist sicher nichtnegativ. Ein Schüler hat die Aufgabe so angepackt, aber er hat einen Rechenfehler gemacht, da die Arbeit mit der Hand kaum zu schaffen ist.

Wir sehen also, daß gerade Derive bei ganz schwierigen geometrischen Problemen hilfreich sein kann. Es werden diffizile geometrische Überlegungen durch massive Rechnungen ersetzt. Dadurch wird der Schwierigkeitsgrad wesentlich reduziert. Automatische Beweise mit Mathematica sind hier kaum zu bewältigen.

Teile dieses Artikels sind etwas umfangreicher in MU, Heft 4, 1995 erschienen.

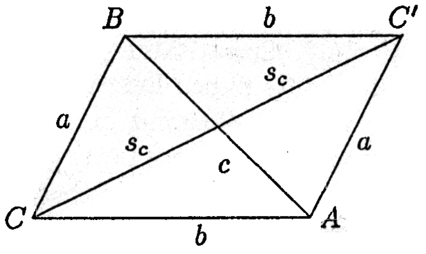

Fig. 6

Bibliographie

[1]. Clark Kimberling, *Central Pints and Central Lines in the Plane of a Triangle.* Mathematics Magazine, 1994, pp. 163-187.

[2]. Clark Kimberling, *Hofstadter Points.* Nieuw Archief vor Wiskunde. Nov. 1994, pp. 109-114.

[3]. H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry. Wiley 1961.