

Josef Lechner

Ein Beispiel für ein Computeralgebra-Modul: der Integrator

Es sollen zwei Zitate zum Thema Computeralgebra-Systeme (CAS) und Module vorangestellt werden:

„CAs erlauben modulares Arbeiten: Man stellt Teile einer Begriffsbildung, eines Lösungsprozesses, etc. als mögliches Objekt im CAS (z.B. als Funktionsausdruck, Term o.ä.) dar und verwendet es in anderen Zusammenhängen, entwickelt das Objekt weiter, setzt verschiedene Objekte zusammen und gelangt damit zu einer höheren Stufe im Prozeß des mathematischen Arbeitens“ (R.KÖHLER vgl. S..., in dieser Veröffentlichung).

„CAs fördern modulares Denken und Arbeiten. Anzustreben ist, daß die Lernenden die Module auch selber entwickeln und dabei zumindest grundsätzliche Kenntnisse des inneren Aufbaues erwerben. Bei der Nutzung dieser Module steht aber dann das Wissen um Funktionalität, Wirksamkeit, Anwendbarkeit usw. im Vordergrund.“ (H.HEUGL 1995, S.248)

Es sollen im folgenden statt einer Präzisierung des Begriffes CA-Modul an einem - z.T. im Unterricht erprobten - Beispiel drei Ideen herausgearbeitet werden: Erstens: *Module stellen eine wesentliche Komponente eines CA-unterstützten, experimentellen Zuganges zur Mathematik dar*, sie können helfen Begriffe vorzubereiten und sollen zu einer Exaktifizierung hinführen. Zweitens können sie eine *wesentliche Rolle im Rahmen eines anwendungsorientierten MUs* spielen, bei dem der Schwerpunkt in der Bildung geeigneter Modelle und Mathematisierungen liegt. Drittens: Werden solche Module geschickt im Unterricht eingesetzt, so können sie *zu wachsen anfangen, eine Eigendynamik entwickeln und eine fruchtbare Weiterentwicklung* erfahren.

Für eine Umsetzung im Unterricht ist es allerdings notwendig, daß den Schülern¹ der Umgang mit DERIVE hinreichend vertraut ist, wenngleich sich auch der Programmieraufwand für die vorgestellten CA-Module durchaus in Grenzen hält, so daß er auch Schülern, die nicht einschlägig „informatisch vorbelastet“ sind, zuzumuten ist.

1 Auftakt Spielereien mit dem Differenzenquotientendreieck

Speziell im Lehrplan der 10.Schulstufe² findet sich der Hinweis, daß „*die Schüler beim Anwenden reeller Funktionen in außermathematischen Situationen mit den verschiedenen Änderungsmaßen (absolute Änderung, mittlere Änderung, relative Änderung) vertraut gemacht werden sollen*“. Weiters „*sollen verschiedene Modelle (diskrete, kontinuierliche) zur Beschreibung solcher Situationen herangezogen werden*“. Zur besseren Illustration der Begriffe absolute und mittlere Änderung (auch absolute und mittlere Änderungsrate) ist es nun günstig, ein kleines Modul zu entwickeln, das wir Differenzenquotientendreieck (DQD) nennen wollen.

a) Ausgehend von anwendungsorientierten Aufgabenstellungen sollen die Begriffe absolute und mittlere

¹Wenn im folgenden allg. von Schülern die Rede ist, sind natürlich stets Schülerinnen und Schüler gemeint.

²Vgl. dazu: Lehrplan für österreichische Gymnasien/Realgymnasien, 6.Klasse, in der geltenden Fassung von 1989.

1 AUFTAKT – SPIELEREIEN MIT DEM DIFFERENZENQUOTIENTENDREIECK

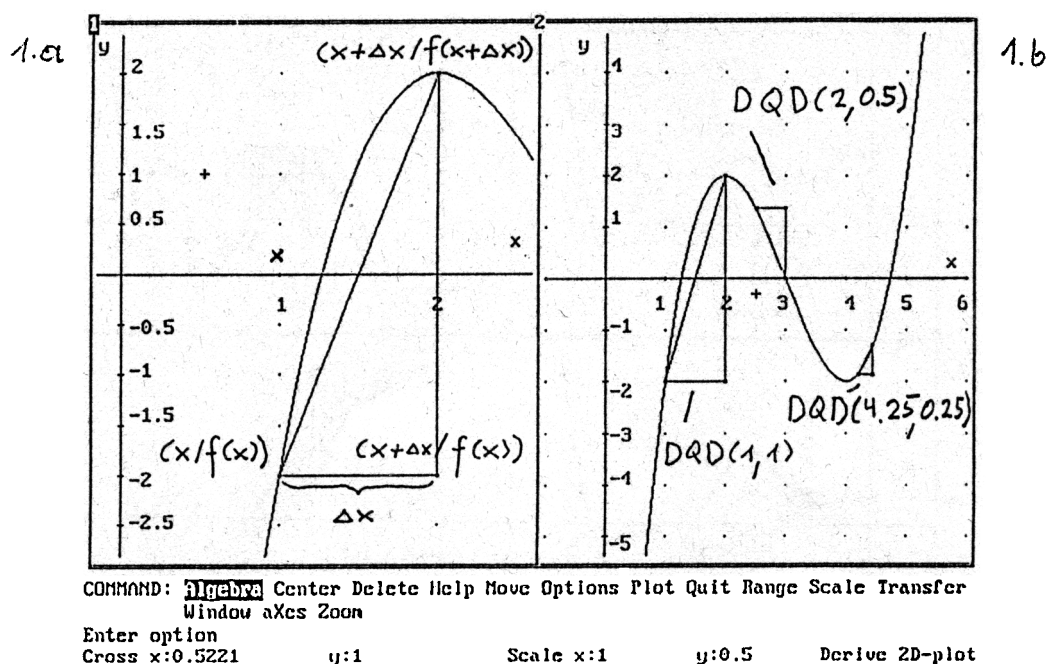


Abbildung 1: Differenzenquotientendreiecke

Änderungsrate thematisiert werden. Wir definieren dazu ein CA-Modul $DQD(x, \delta x)^3$:

#1: "Modul 1.0: Differenzenquotientendreieck"

```

      x      F(x)
#2: DQD(x, δx) :=  x + δx  F(x)
                   x + δx  F(x + δx)
                   x      F(x)

```

Das Modul selbst dient zum Zeichnen eines DQDs und stellt damit eine geometrische Entsprechung zum formalen Ausdruck $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ dar. Mit diesem kleinen Modul wird der Begriff des Differenzenquotienten (DQ) nun für den Schüler aber besser zugänglich und bearbeitbar:

- Absolute und mittlere Änderung bekommen eine geometrische Bedeutung (absolute als Länge der Kathete \overline{BC} , mittlere als Steigung der Hypotenuse \overline{AC}), siehe Abb.1.a
- Der Schüler kann das DQD rasch mit beliebiger Schrittweite an beliebiger Stelle der Funktion zeichnen lassen, z.B. mit $DQD(2, 0.5)$, Abb.1.b.

b) Mit Hilfe des VECTOR-Befehls läßt sich das DQD auch „auf die Reise“ schicken. In der Abb.2.b wurde als „Reiseroute“ für das DQD z.B. das Polynom $y(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ gewählt.

Beim Wandern des DQDs wird nun die ursprüngliche Kurve reproduziert, es entsteht aber zusätzlich eine neue Kurve, die in Abb.2.b nicht klar zutage tritt. Erst wenn die absoluten Änderungen (Gegenkatheten im Dreieck vom Punkt $(x/f(x))$ aus gesehen) herausgenommen und an der zugehörigen Stelle x aufgetragen werden, entsteht ein Streckendiagramm (2.c), aus dem durch Weglassen der Strecken

³Statt dem Symbol Δ wird in den DERIVE-Listings stets δ verwendet

1 AUFTAKT – SPIELEREIEN MIT DEM DIFFERENZENQUOTIENTENDREIECK

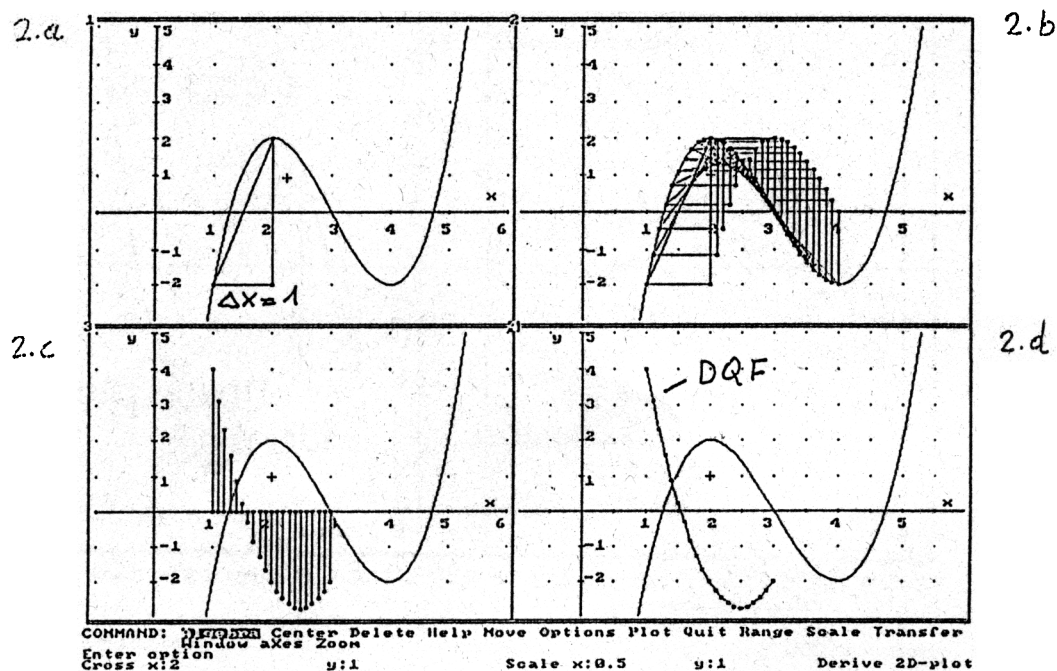


Abbildung 2: Das wandernde Differenzenquotientendreieck

ein Punktgraph (2.d) entsteht. Die Punkte können natürlich beliebig fein gesetzt werden, wir können schließlich ja das DQD beliebig fein verschieben. Wir beschränken uns in der heuristischen Phase auf einfache, stetige Funktionen.

Im folgenden Listing sind die dazu in DERIVE notwendigen Funktionen zu sehen:

#3: "Das Differenzenquotientendreieck geht auf die Reise"

#4: `VECTOR(DQD(x, 1), x, 1, 3, 0.1)`

#5: "Differenzen"

#6: $DZ(x, \delta x) := \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & F(x + \delta x) - F(x) \end{bmatrix}$

#7: `VECTOR(DZ(x, 1), x, 1, 3, 0.1)`

#8: "Punkte -> Differenzenquotientenfunktion"

#9: `DZP(x, \delta x) := [x, F(x + \delta x) - F(x)]`

#10: `DQF(x, a, b, \delta x) := VECTOR(DZP(x, \delta x), x, a, b, \delta x)`

#11: `DQF(x, 1, 3, 0.1)`

Durch dieses Wandern und durch die Abstraktion aus dem DQD haben wir also eine neue Funktion bekommen, die bei konstanter Schrittweite die absolute Änderung der ursprünglichen Funktion beschreibt: die Differenzenquotientenfunktion (DQF).

c) Haben wir bisher mit einer Schrittweite von $\Delta x = 1$ experimentiert, so wollen wir uns nun der Abhängigkeit von der Schrittweite zuwenden. Es soll beobachtet werden, wie sich die DQF dadurch verändert. Entwickelt man – in Analogie zu b) – die DQF, so sieht man diese mit kleiner werdendem

1 AUFTAKT – SPIELEREIEN MIT DEM DIFFERENZENQUOTIENTENDREIECK

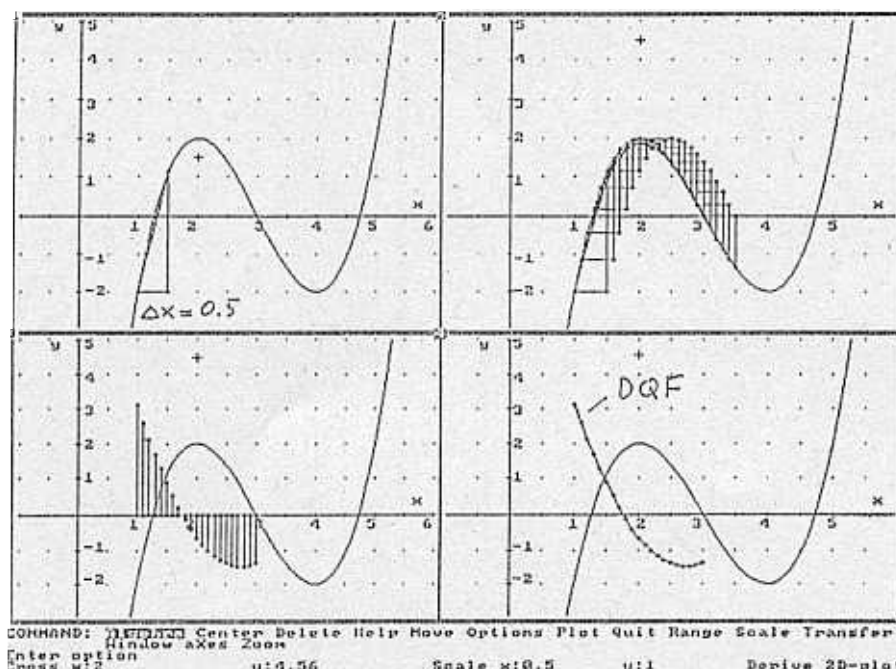


Abbildung 3: Wanderndes Differenzenquotientendreieck mit kleinerer Schrittweite

Δx bald verschwinden (vgl. Abb.2 und 3). Je kleiner die Schrittweite Δx wird, desto stärker nähert sich die DQF an die x-Achse an. Worin liegt die Ursache für diesen Fehlversuch?

Im DQD stecken zwei Informationen: die absolute Änderungsrate $f(x + \Delta x) - f(x)$ (geometrisch als Kathete gegenüber $(x/f(x))$ im Dreieck) und die mittlere Änderungsrate $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (geometrisch veranschaulicht als Steigung der Hypotenuse des Dreiecks). Während bei kleiner werdendem Δx die zweite Information – die mittlere Änderungsrate – erhalten bleibt, wird die erste „unbrauchbar“. Betrachten wir die Sachlage noch genauer: absolute und mittlere Änderungsrate sind für $\Delta x = 1$ gleich, d.h. in diesem – und nur in diesem Fall – stellt die Gegenkathete ein Maß für die Steigung der Hypotenuse und damit für die Änderung der betrachteten Funktion dar.

Um die erste Information – über die wir die DQF erhalten – weiter nützen zu können, wollen wir nun zu einem Doppeldreieck übergehen. Wir erhalten es, indem wir zusätzlich zum Dreieck mit der Schrittweite Δx ein vergrößertes Dreieck mit einer Schrittweite von $\Delta x = 1$ zeichnen lassen. Auf elementar-geometrischem Wege (Strahlensatz, siehe Skizze 1, folgende Seite) können wir dabei das vergrößerte Dreieck gewinnen.

Wir haben damit also unser Ziel erreicht: auf der einen Seite können wir die Schrittweite nun beliebig klein werden lassen ohne auf der anderen die Information über die Änderung der Funktion zu verlieren. Weiters haben wir gesehen: aus dem wandernden DQD läßt sich eine Funktion „ableiten“. Die Schrittweite Δx entpuppt sich dabei als „sensible“ Größe.

#12: "Modul 1.2: Differenzenquotientendreieck mit Vergrößerung (DQDV)"

$$\#13: \text{DQDV}(x, \delta x) := \left[\begin{array}{cc} x & F(x) \\ x+1 & F(x) \\ x+1 & F(x) + \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x} \\ x & F(x) \end{array} \right]$$

AUFTAKT – SPIELEREIEN MIT DEM DIFFERENZENQUOTIENTENDREIECK

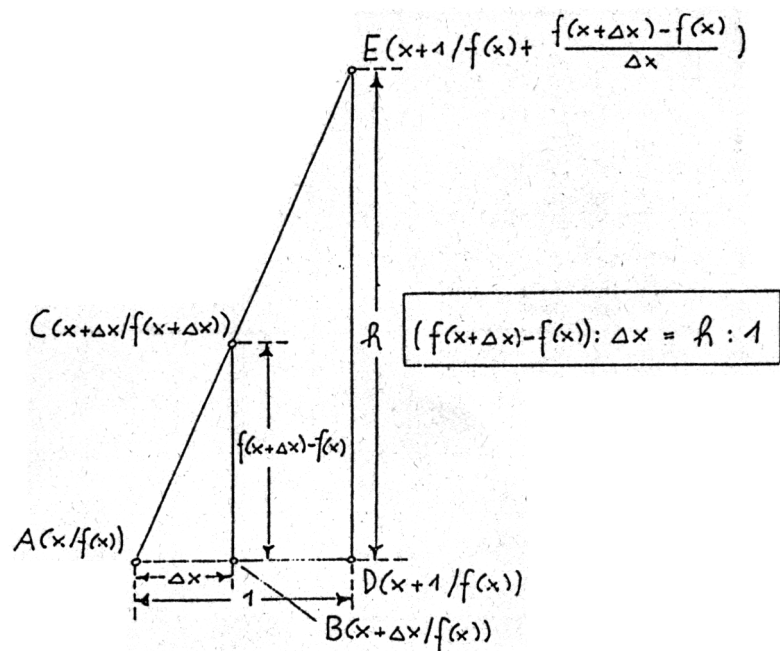


Abbildung 4: Skizze 1

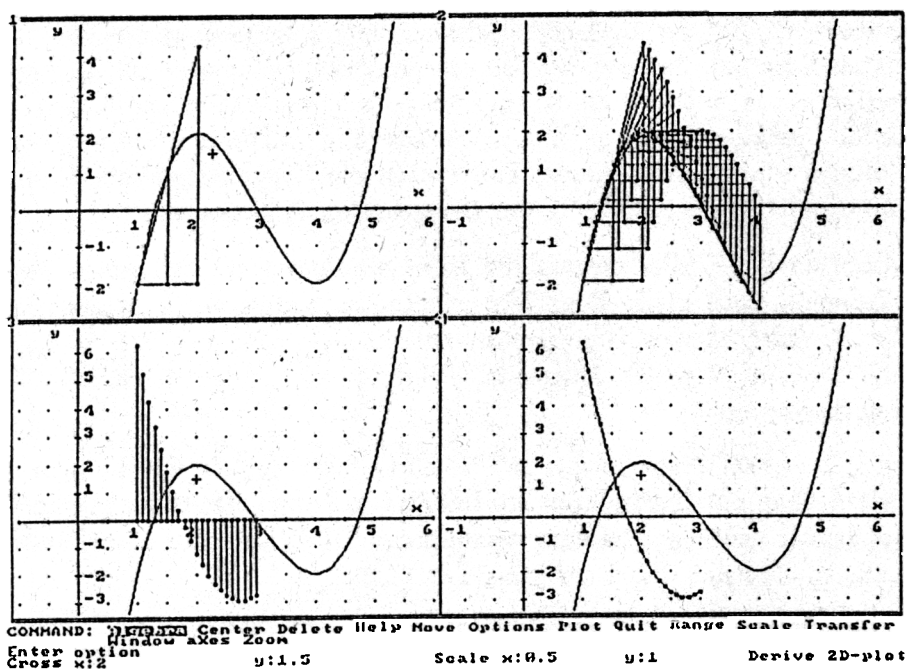


Abbildung 5: Differenzenquotientendreieck mit Vergrößerung (DQDV)

1 AUFTAKT – SPIELEREIEN MIT DEM DIFFERENZENQUOTIENTENDREIECK

d) Lokale Betrachtungsweise: Wir gehen an einer Stelle x_0 mit $\Delta x \rightarrow 0$ (Abb.6).

#14: "Lokale Betrachtungsweise: gehen jetzt mit $\delta x \rightarrow 0$ "

#15: VECTOR(DQDV(1, δx), δx , 1, 0, -0.1)

#16: VECTOR(DZ(1, δx), δx , 1, 0, -0.1)

#17: VECTOR(DZP(1, δx), δx , 1, 0, -0.1)

#18:

1	4
1	4.41
1	4.84
1	5.29
1	5.76
1	6.25
1	6.76
1	7.29
1	7.84
1	8.41
1	?

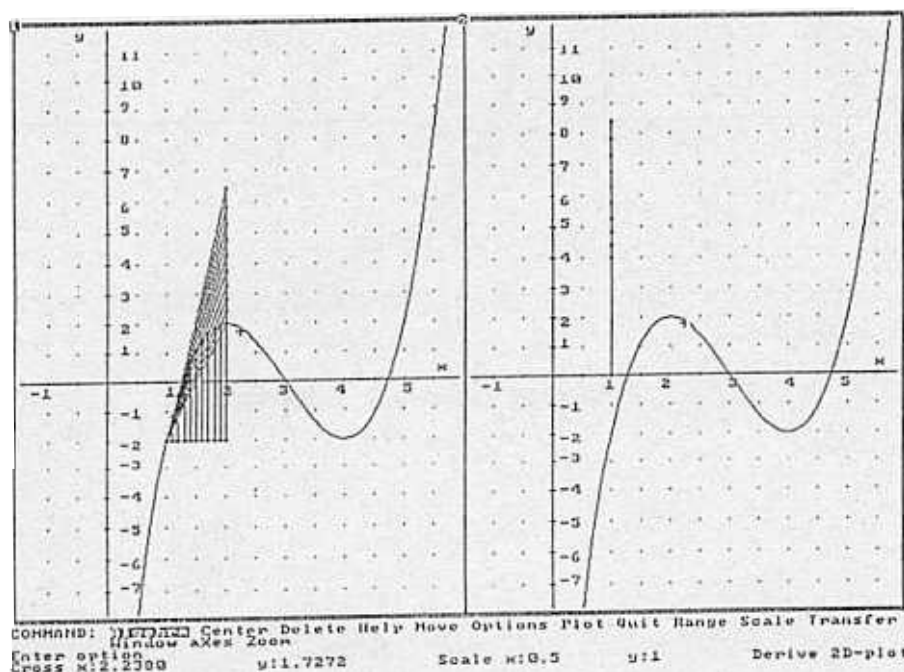


Abbildung 6: Lokale Annäherung

Man sieht hier bereits die Grenzen dieser Annäherung: Verwendet man als Schrittweite den Wert $\Delta x = 0$, so liefert das System an Stelle eines Zahlenwertes ein Fragezeichen. Um dieses letzte Fragezeichen zu überwinden, bedarf es also weiterer, anders gelagerter Methoden.

Es ist m.E. sehr heilsam, immer wieder an solche Grenzen zu stoßen und diese auch im Unterricht entsprechend deutlich zu machen. Diese Grenzen bergen viele didaktische Chancen in sich (Vermeidung

1 AUFTAKT – SPIELEREIEN MIT DEM DIFFERENZENQUOTIENTENDREIECK

von blindem Vertrauen in das CAS; Erkenntnis, daß die Mathematik in viel mehr als dem „Ausreizen“ der Möglichkeiten eines CAS besteht; die Herausforderung, sich mit diesen Grenzen weiter auseinanderzusetzen, u.v.a.m.)

Gehen wir zu einer globalen Betrachtungsweise über: Die DQF nähert sich immer stärker der Ablei-

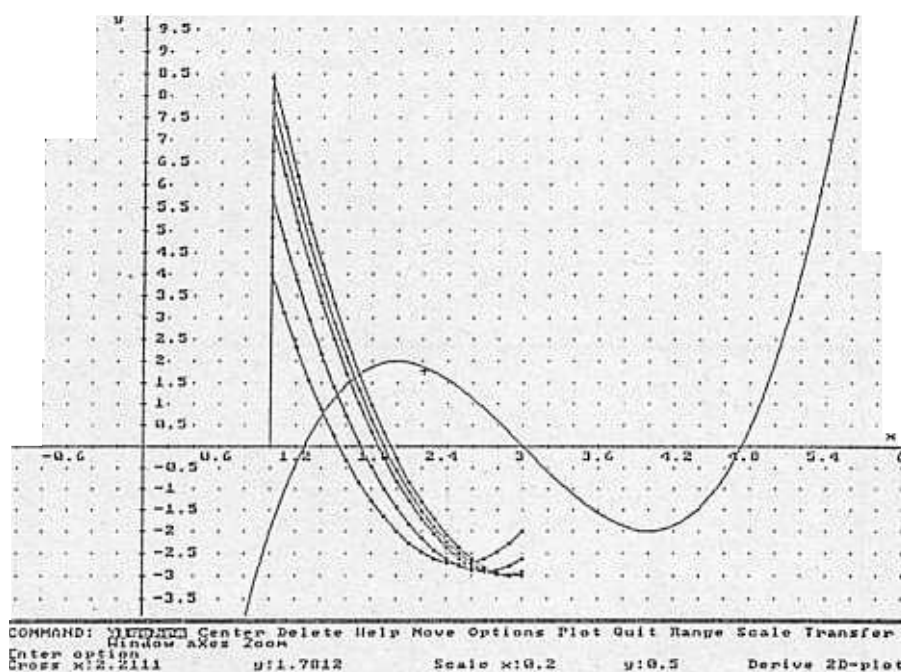


Abbildung 7: Globale Annäherung

2 DIE UMKEHRUNG – DER INTEGRATIVE ASPEKT

tungsfunktion. Auch hier tritt diese 'letzte' Grenze wieder in Erscheinung:

#19: "Globale Betrachtungsweise"

#20: VECTOR(VECTOR(DZP(x, δx), x, 1, 3, 0.1), δx , 1, 0, -0.1)

#21:	1 4		1 4.41		1 4.84		1 8.41		1 ?	
	1.1	3.13	1.1	3.51	1.1	3.91	1.1	7.27	1.1	?
	1.2	2.32	1.2	2.67	1.2	3.04	1.2	6.19	1.2	?
	1.3	1.57	1.3	1.89	1.3	2.23	1.3	5.17	1.3	?
	1.4	0.88	1.4	1.17	1.4	1.48	1.4	4.21	1.4	?
	1.5	0.25	1.5	0.51	1.5	0.79	1.5	3.31	1.5	?
	1.6	-0.32	1.6	-0.09	1.6	0.16	1.6	2.47	1.6	?
	1.7	-0.83	1.7	-0.63	1.7	-0.41	1.7	1.69	1.7	?
	1.8	-1.28	1.8	-1.11	1.8	-0.92	1.8	0.97	1.8	?
	1.9	-1.67	1.9	-1.53	1.9	-1.37	1.9	0.31	1.9	?
	2	-2	2	-1.89	2	-1.76	2	-0.29	2	?
	2.1	-2.27	2.1	-2.19	2.1	-2.09	2.1	-0.83	2.1	?
	2.2	-2.48	2.2	-2.43	2.2	-2.36	2.2	-1.31	2.2	?
	2.3	-2.63	2.3	-2.61	2.3	-2.57	2.3	-1.73	2.3	?
	2.4	-2.72	2.4	-2.73	2.4	-2.72	2.4	-2.09	2.4	?
	2.5	-2.75	2.5	-2.79	2.5	-2.81	2.5	-2.39	2.5	?
	2.6	-2.72	2.6	-2.79	2.6	-2.84	2.6	-2.63	2.6	?
	2.7	-2.63	2.7	-2.73	2.7	-2.81	2.7	-2.81	2.7	?
	2.8	-2.48	2.8	-2.61	2.8	-2.72	2.8	-2.93	2.8	?
	2.9	-2.27	2.9	-2.43	2.9	-2.57	2.9	-2.99	2.9	?
	3	-2	3	-2.19	3	-2.36	3	-2.99	3	?

Die Annäherung endet also in 'letzten' Fragezeichen. Wir werden auf natürliche Art und Weise zur Notwendigkeit einer Präzisierung bzw. Exaktifizierung eines heuristischen Konzeptes hingeführt. Dabei ist aber m.E. das vorgestellte heuristische Konzept ein didaktisch zulässiges, da es korrekte Vorstellungen vermittelt und auch den richtigen Weg zu einer nachfolgenden exakten Begriffsbildung anzeigt.

2 Die Umkehrung – der integrative Aspekt, eine heuristische Vorbereitung des Fragenkomplexes Integration

a) Nehmen wir an, die Ausgangsfunktion von Teil 1 sei aus irgendeinem Grunde verlorengegangen, aber wir wissen wie sich diese Funktion an jeder Stelle ändert. D.h. wir kennen nun die Änderungsfunktion und wollen versuchen, mit der gleichen Methode wieder den Verlauf der ursprünglichen Funktion aufzubauen. Dazu zeichnen wir nun (kleine) Steigungsdreiecke (jetzt sind es wirklich Steigungsdreiecke!) und hängen sie aneinander. Dies sieht dann folgendermaßen aus (Abb.8):

2 DIE UMKEHRUNG – DER INTEGRATIVE ASPEKT

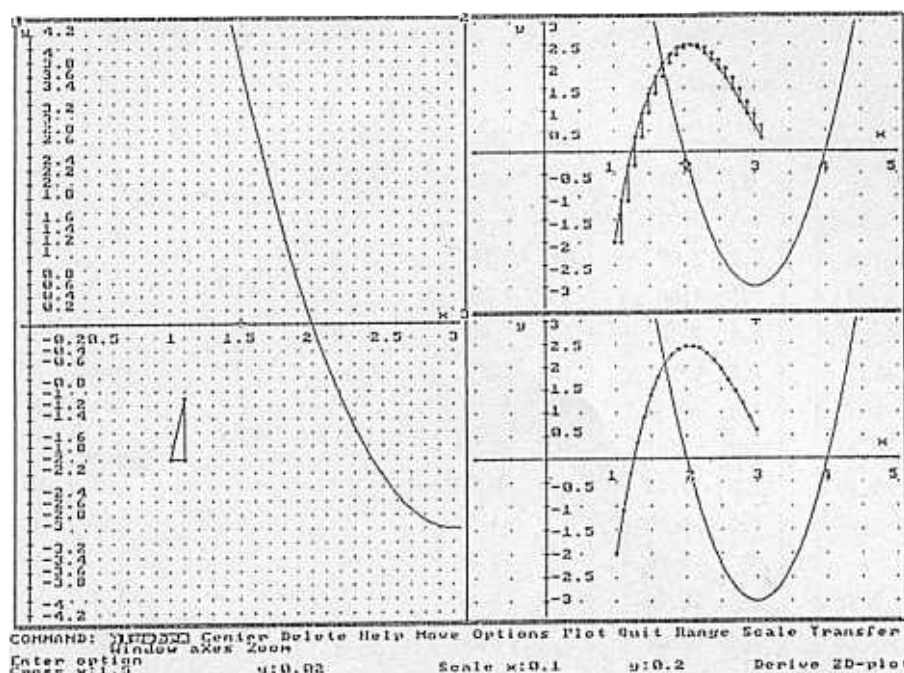


Abbildung 8: Aus (kleinen) Steigungsdreiecken entsteht die ursprüngliche Funktion

Das zugehörige Listing:

#1: "Wir 'basteln' mit (kleinen) Steigungsdreiecken den ursprünglichen Graphen"

#2: "Geg.: die lokale Änderungsrate einer gesuchten Funktion $y(x)$ "

#3: "Es sei z.B. $r(x) := 3 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$ mit $y(1) = -2$ "

#4: $R(x) := 3 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

#5: "Steigungsdreieck im Punkt $P(x/y)$ mit einer Schrittweite δx "

#6: $\text{STD}(x, y, \delta x) :=$

x	y
$x + \delta x$	y
$x + \delta x$	$y + R(x) \cdot \delta x$
x	y

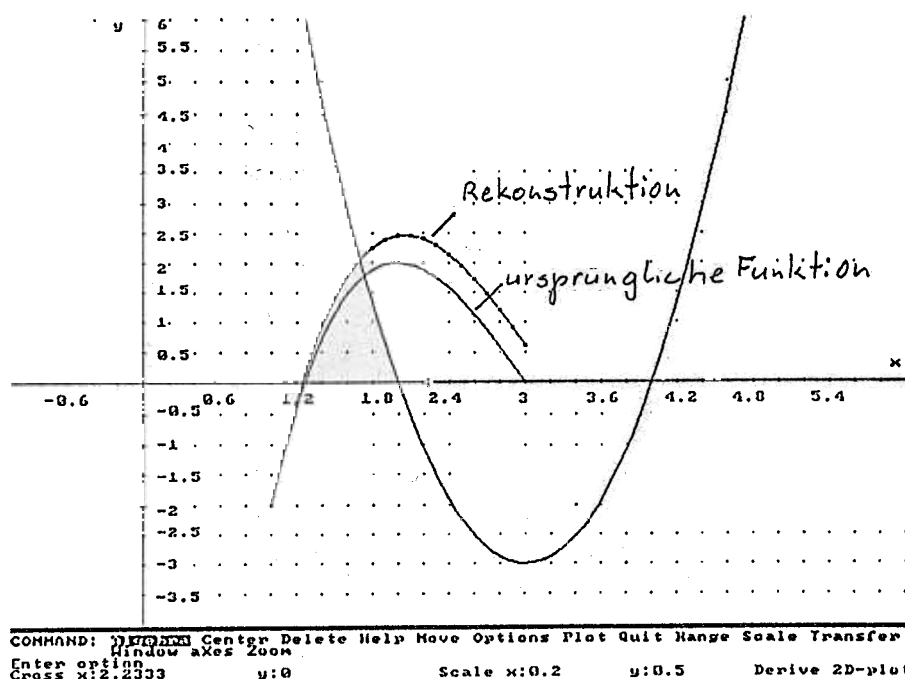
#7: "Ein Beispiel:"

#8: $\text{STD}(1, -2, 0.1) =$

$\frac{1}{10}$	$\frac{-2}{10}$
$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$
1	-2

Nun werden die Steigungsdreiecke aneinandergehängt :

2 DIE UMKEHRUNG – DER INTEGRATIVE ASPEKT

Abbildung 9: Vergleich zw. der rekonstruierten und der tatsächlichen Funktion ($\Delta x = 0,1$)

b) Die Steigungsdreiecke werden also derart aneinandergelagert, daß am Ort des 'oberen' Eckpunktes das nächste Dreieck ansetzt. Läßt man nun die Dreiecke weg und beschränkt sich nur auf die verwendeten Punkte, so erhält man einen Graphen, der dem ursprünglichen Graphen zumindest ähnlich sieht. Das neue Modul, mit dem wir dies erreichen, wollen wir *Integrapph* nennen:

```
#13: INTEGRAPH(x0, y0, dx, n) := ITERATES([x + dx, y + R(x)·dx], [x, y], [x0, y0], n)
```

```
#14: INTEGRAPH(1, -2, 0.1, 5)
```

```
#15:
      1   -2
      1.1 -1.1
      1.2 0.317
      1.3 0.355
      1.4 0.922
      1.5 1.39
```

Ist die Änderungsrate r (der „Zuwachs“) einer Größe y bekannt, so läßt sich mit dem Modul der ungefähre Verlauf von y ermitteln. Die Funktion $r(x)$ steuert dabei den „Zeichenstift“ des *Integrapph*. Gleichzeitig haben wir damit das *EULER-CAUCHY*-Verfahren implementiert.

Geht es nicht besser? Vergleichen wir den mit dieser Methode erhaltenen Graphen mit dem ursprünglichen Graphen genauer, so zeigt sich, daß dieses erste Ergebnis durchaus verbesserungsbedürftig ist. Eine Verbesserung läßt sich natürlich mit einer Verkleinerung der Schrittweite Δx erzielen, was aber den Rechenaufwand drastisch erhöht.

Zur Syntax des im folgenden häufig verwendeten *ITERATES*-Befehls: *ITERATES* wird mit vier Parametern aufgerufen:
1. zu iterierende(r) Term(e), 2. „Laufvariable(n)“, 3. Startwert(e), 4. Anzahl der Iterationsschritte

2 DIE UMKEHRUNG – DER INTEGRATIVE ASPEKT

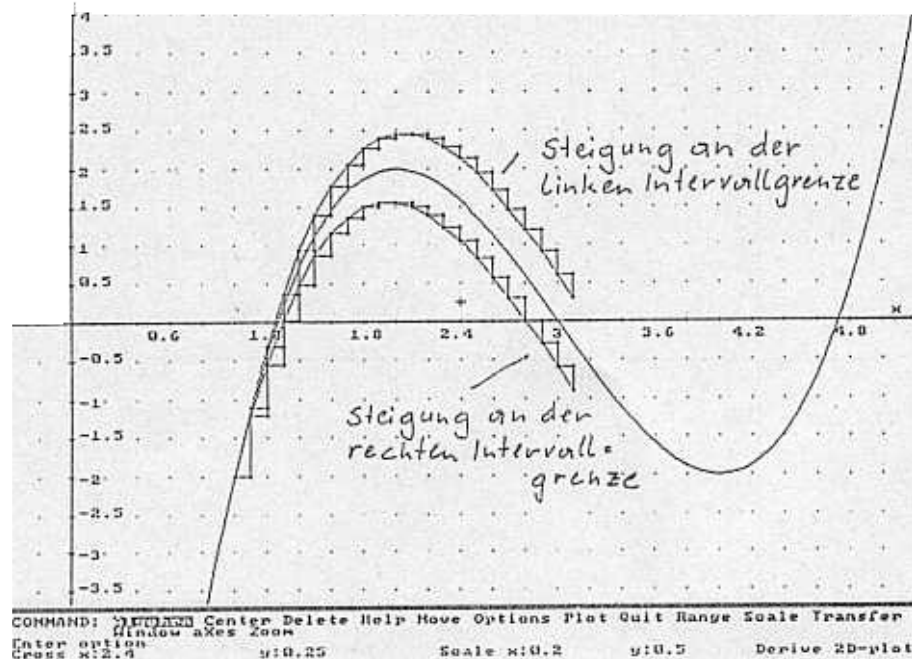
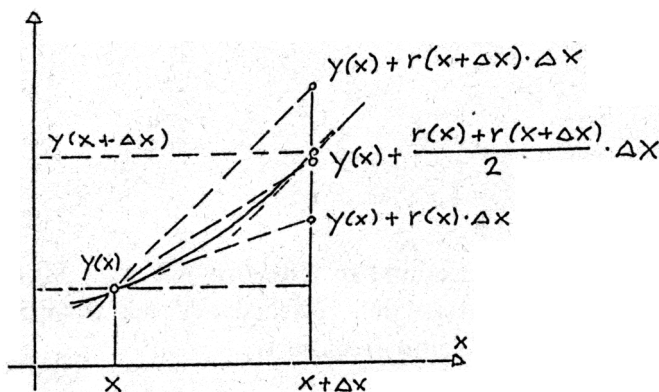


Abbildung 10: Steigungsdröckje mit der Steigung am Intervallbeginn (an der Stelle x) und am Intervallende ($x + \Delta x$)

c) Verwenden wir als Steigung für das Steigungsdröckje im Intervall $[x, x + \Delta x]$ nicht die Steigung an der Stelle x , also $r(x)$, sondern die Steigung an der rechten Intervallgrenze $x + \Delta x$ so erhalten wir eine veränderte Kurve (siehe Abb.10).

Es bieten sich – wieder auf ganz elementar-geometrischen Wege – zwei Möglichkeiten an, zu einem Mittelwert zu gelangen:

α) wir nehmen den Mittelwert der beiden Steigungen an den Intervallgrenzen,



2 DIE UMKEHRUNG – DER INTEGRATIVE ASPEKT

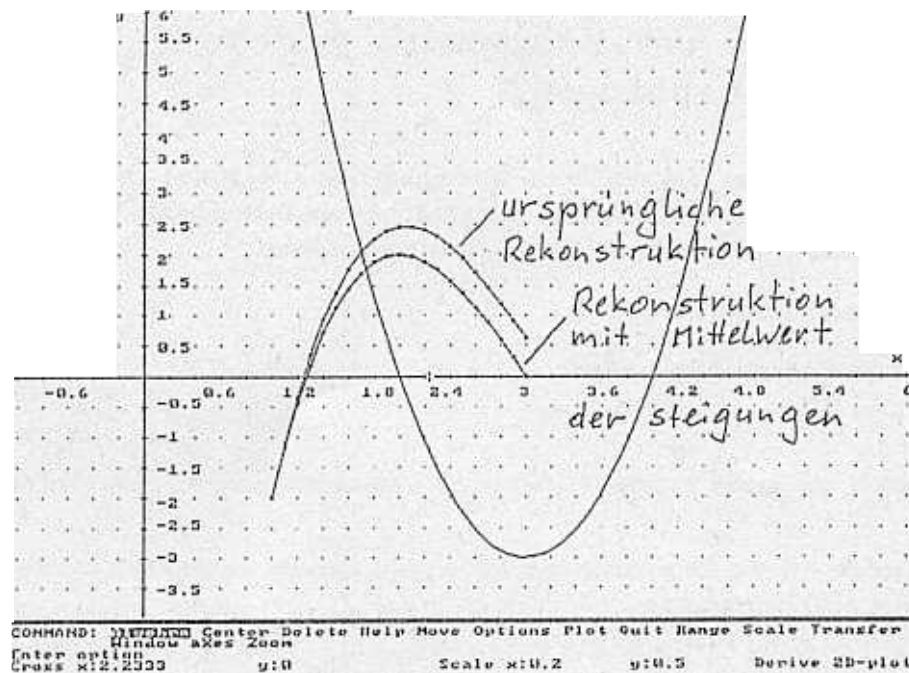
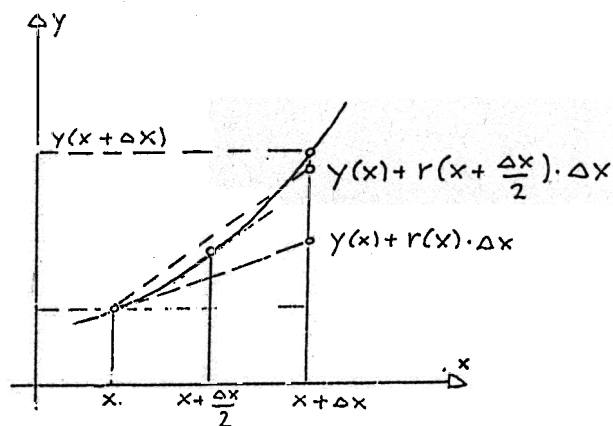


Abbildung 11: Hier wurde zur Integration der Mittelwert der Steigungen an den Intervallgrenzen verwendet

β) wir nehmen die Steigung in der Mitte des Intervalles.



Beide Varianten bringen uns dem Ziel ein großes Stück näher und bringen i.w. gleich gute Ergebnisse. Beide Methoden lassen sich sehr leicht in unseren Integrappen einbauen, und wir erhalten damit eine DERIVE-Implementation des sogenannten Halbschrittverfahrens:

```
#29: INTEGRAPH_IE1(x0, y0, Δx, n) := ITERATES[[x + Δx, y +  $\frac{(R(x) + R(x + Δx)) \cdot Δx}{2}$ ], [x, y], [x0, y0], n]
```

```
#30: INTEGRAPH_IE2(x0, y0, Δx, n) := ITERATES[[x + Δx, y +  $R\left[x + \frac{Δx}{2}\right] \cdot Δx$ ], [x, y], [x0, y0], n]
```

3 WODURCH WIRD DER ZEICHENSTIFT GESTEUERT?

3 Wodurch wird der Zeichenstift gesteuert? Wovon kann die Änderungsrate abhängen?

a) Durch Betrachtung einer universelleren Änderungsrate $r = r(x,y)$ und durch die Verbesserung des numerischen Verfahrens wird aus dem Integrator ein brauchbares Werkzeug zur Bearbeitung verschiedenster Modelle, insbesondere von Wachstumsprozessen.

#1: "Ein Verallgemeinerung $r = r(x,y)$ "

#2: "INTEGRAPH für verschiedene Zwecke"

#3: $R(x, y) :=$

#4: $\text{INTEGRAPH}(x0, y0, \delta x, n) := \text{ITERATES}([x + \delta x, y + R(x, y) \cdot \delta x], [x, y], [x0, y0])$

Beispiel 2.1: Stellen wir die Ergebnisse gegenüber, die uns der Integrator liefert, wenn wir für $r = r(x) = x$ und $r = r(y) = y$ setzen:

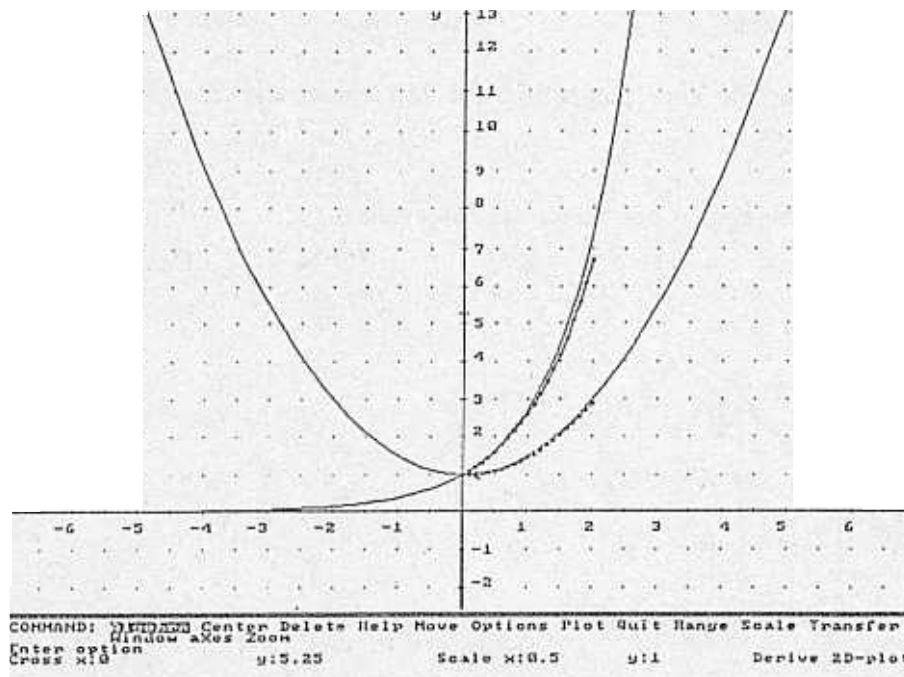


Abbildung 12: Integrator mit $r = r(x) = x$ und $r(y) = y$, Startwert $y(0) = 1$

Die Vermutung, daß $r(y) = y$ auf die Exponentialfunktion $y(x) = e^x$ bzw. allgemeiner $r(y) = k \cdot y$ auf $y(x) = y(0)e^{kx}$ führt, stellt sich als zutreffend heraus: Was steckt dahinter?

Da $r(y)$ die lokale Änderungsrate der Größe y ist, wir können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned} y'(x) &= k \cdot y(x) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= k \\ \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int k dx \end{aligned}$$

3 WODURCH WIRD DER ZEICHENSTIFT GESTEUERT?

$$\begin{aligned}
 \ln|y(x)| &= k \cdot x + c \\
 |y(x)| &= e^{k \cdot x + c} \\
 (\text{da } e^{k \cdot x + c} &> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
 \text{und } y(0) &= e^c \text{ ergibt sich:} \\
 y(x) &= y(0) \cdot e^x
 \end{aligned}$$

Der Integraph macht es freilich etwas anders, nämlich in diskreten Schritten:

$$\begin{aligned}
 \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} &= k_{\Delta x} \cdot y(x) \\
 y(x + \Delta x) &= y(x) \cdot (1 + k_{\Delta x} \cdot \Delta x) \\
 y(\Delta x) &= y(0) \cdot (1 + k_{\Delta x} \cdot \Delta x) \\
 y(2 \cdot \Delta x) &= y(\Delta x + \Delta x) = y(\Delta x) \cdot (1 + k_{\Delta x} \cdot \Delta x) \\
 &= y(0) \cdot (1 + k_{\Delta x} \cdot \Delta x)^2 \\
 &\vdots \\
 y(n \cdot \Delta x) &= y(0) \cdot (1 + k_{\Delta x} \cdot \Delta x)^n
 \end{aligned}$$

Im Fall von Beispiel 2.1 erreicht y also nach n Schritten der Größe $\Delta x = 0,1$ mit $k_{\Delta x} = 1$ den Wert $y(n \cdot 0,1) = y(0) \cdot (1 + 0,1)^n$, also z.B. $y(2) = 1,1^{20} \approx 6,7275$, während sich im kontinuierlichen Fall $y(2) = e^2 \approx 7,3891$ ergibt. Diese Art von Approximation ist also durchaus verbesserungsbedürftig.

Um den Unterschied zwischen $r = r(x) = x$ und $r = r(y) = y$ noch besser deutlich werden zu lassen, können wir auch die entsprechenden Richtungsfelder zeichnen lassen.

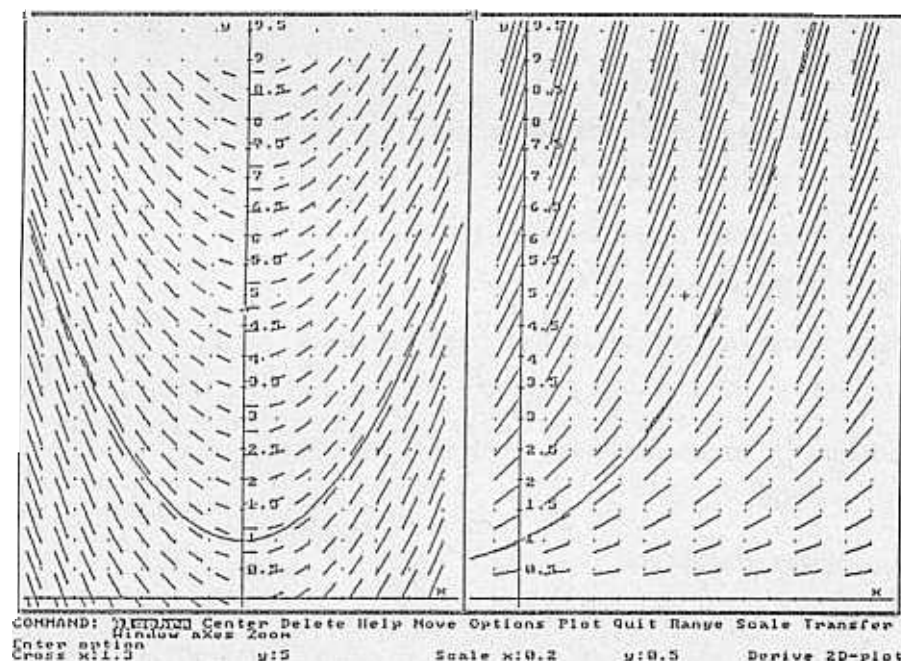


Abbildung 13: Richtungsfelder für $r = r(x) = x$ und $r = r(y) = y$

Interpretieren wir y als Bestand einer Größe zur Zeit t , so erweist sich der Integraph als nützliches Werkzeug zur Behandlung einer geradezu abenteuerlichen Fülle von Beispielen und Modellen. Ein Auswahl sei hier skizziert:

3 WODURCH WIRD DER ZEICHENSTIFT GESTEUERT?

- Lineares (additives) Wachstum

$$r = r(t, y) = k$$
- Speichermodell

$$r = r(t, y) = f(t) \quad (f(t) \text{ ist dabei eine bel.zeitabh.Funktion})$$
- Exponentielles Wachstum/Zerfall

$$r = r(t, y) = k \cdot y$$
- Speicher mit exponentielles Zerfall

$$r = r(t, y) = f(t) - k \cdot y$$
- Zeitabhängiges exponentielles Wachstum/Zerfall

$$r = r(t, y) = f(t) \cdot y$$
- Aufbau und Abbau / Geburt und Tod

$$r = r(t, y) = (f(t) - g(t)) \cdot y$$
- Begrenztes Wachstum

$$r = r(t, y) = k \cdot (G - y)$$
- Zeitabhängiges begrenztes Wachstum

$$r = r(t, y) = f(t) \cdot (G - y)$$
- Logistisches Wachstum

$$r = r(t, y) = k \cdot y \cdot (G - y)$$
- Logistisches Wachstum mit konstanter Ernte

$$r = r(t, y) = k \cdot y \cdot (G - y) - c$$
- Logistisches Wachstum mit zeitabhängiger Ernte

$$r = r(t, y) = k \cdot y \cdot (G - y) - f(t)$$
- Logistisches Wachstum mit bestandsabhängiger Ernte

$$r = r(t, y) = k \cdot y \cdot (G - y) - c \cdot y$$
- Hyperbolisches (überexponentielles, explosives) Wachstum

$$r = r(t, y) = k \cdot y^2$$
- Dichteabhängiges Wachstum

$$r = r(t, y) = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{c+y}\right) - c \cdot y$$
- ...

b) Wenngleich der einfache Integrator bei den bisherigen Beispielen dieses Teils qualitativ auch ganz gute Ergebnisse geliefert hat, so zeigte doch etwa die Gegenüberstellung bei Beisp.2.1 die Grenzen dieses Verfahrens auf. Wir wollen nun wieder darangehen (ähnlich wie in 2.c) durch geometrische Überlegungen zu einer Verbesserung des Integrators zu gelangen.

3 WODURCH WIRD DER ZEICHENSTIFT GESTEUERT?

Die bisher verwendete Variante unseres Moduls – die eine Implementation des EULER-CAUCHY-Verfahrens darstellt – wollen wir INTEGRAPH_EC nennen:

#11: "Euler - Cauchy - Verfahren"

#12: INTEGRAPH_EC(x0, y0, δx, n) := ITERATES([x + δx, y + R(x, y)·δx], [x, y], [x0, y0], n)

Ausgehend vom der in 2.c vorgestellten Variante (anstelle der Änderungsrate am Intervallbeginn wird die Änderungsrate in der Intervallmitte verwendet) soll für den Fall $r=r(x,y)$ ein analoges Halbschrittverfahren hergeleitet und anschließend implementiert (Abb. 14.b) werden: Wir berechnen dazu zuerst in einem Halbschritt einen Näherungswert y_m von y in der Intervallmitte. Dazu verwenden

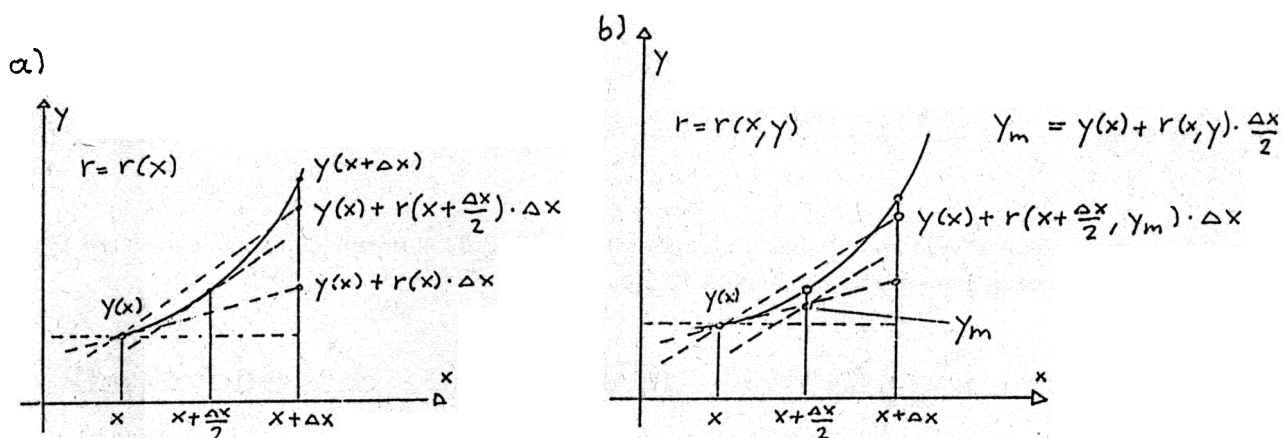


Abbildung 14: Halbschrittverfahren bei $r = r(x)$ und $r = r(x, y)$

wir die Änderungsrate im Startpunkt $(x, y(x))$. Auf diese Art und Weise erhalten wir einen Stützpunkt $(x + \frac{\Delta x}{2}, y_m)$. Mit der Änderungsrate in diesem Stützpunkt gehen wir schließlich einen ganzen Schritt weiter. Das folgende Listing zeigt die Implementation dieses numerisch verbesserten Verfahrens INTEGRAPH_IE (Improved-Euler-Cauchy-Verfahren, Halbschrittverfahren).

#13: "Halbschrittverfahren, Improved Euler-Cauchy"

#14: INTEGRAPH_IE(x0, y0, δx, n) := ITERATES([x + δx, y + R[x + $\frac{\delta x}{2}$, y + $\frac{R(x, y) \cdot \delta x}{2}$]·δx], [x, y], [x0, y0], n)

Wenn das Halbschrittverfahren auch in der Regel gute bis sehr gute Ergebnisse liefert, so läßt es sich durchaus noch weiter verbessern: eine weitere Verbesserung stellt hier das RUNGE-KUTTA-Verfahren dar, das zur Berechnung des nächsten Schrittes einen gewichteten arithmetischen Mittelwert aus vier Änderungsraten verwendet. Die erste Änderungsrate r_1 ist die Änderungsrate beim Startpunkt $r_1 = r(x, y)$. Mit die Änderungsrate r_1 wird genauso wie beim Halbschrittverfahren ein Stützpunkt in der Intervallmitte berechnet. Die Änderungsrate in diesem Stützpunkt nennen wir r_2 . Mit Hilfe von r_2 wird in gleicher Art und Weise vom Startpunkt aus ein zweiter Stützpunkt berechnet, die Änderungsrate in diesem Punkt ist dann r_3 . Schließlich wird noch ein dritter Stützpunkt dadurch ermittelt, daß mit r_3 ein ganzer Schritt durchgeführt wird. Für die Berechnung des neuen Punktes wird schließlich der Mittelwert

$$\frac{r_1 + 2 \cdot r_2 + 2 \cdot r_3 + r_4}{6}$$

4 MEHRDIMENSIONALE WACHSTUMSPROZESSE – SYSTEMDYNAMIK

herangezogen. Hier ist ein günstiger Anlaß, im Unterricht die Qualität verschiedener numerischer

```
#15: "Runge-Kutta-Verfahren"
```

```
#16: RK1(x, y, δx) := R(x, y)·δx
```

```
#17: RK2(x, y, δx) := R[ $x + \frac{\delta x}{2}$ ,  $y + \frac{RK1(x, y)}{2}$ ]
```

```
#18: RK3(x, y, δx) := R[ $x + \frac{\delta x}{2}$ ,  $y + \frac{RK2(x, y)}{2}$ ]·δx
```

```
#19: RK4(x, y, δx) := R(x + δx, y + RK3(x, y))·δx
```

```
#20: INTEGRAPH_RK(x0, y0, δx, n) :=
```

```
ITERATES[[ $x + \delta x$ ,  $y + \frac{RK1(x, y, \delta x) + 2 \cdot RK2(x, y, \delta x) + 2 \cdot RK3(x, y, \delta x) + RK4(x, y, \delta x)}{6}$ ], [x, y], [x0, y0], n]
```

Verfahren einzugehen. Wie lassen sich die verwendeten Verfahren vergleichen, was kann als Qualitätskriterium herangezogen werden? (Rechenzeit, Genauigkeit etc.)

4 Mehrdimensionale Wachstumsprozesse Systemdynamik

Es soll nun darangegangen werden, den in Teil 2 und 3 verwendeten und bereits verbesserten Integraphen noch weiter auszubauen, um damit ein Werkzeug bereitzustellen, mit dem auch Aufgabenstellungen aus der Systemdynamik behandelt werden können.

a) Um nun Systeme von Differenzgleichungen zu bearbeiten und numerischen bzw. graphischen Lösung zu gelangen, können wir sehr einfach die Implementation der Integraphen erweitern:

```
#1: "Integraphen für Systeme von Differenzgleichungen"
```

```
#2: INTEGRAPH_2D(t0, x0, y0, δt, n) :=
```

```
ITERATES([t + δt, x + R1(x, y)·δt, y + R2(x, y)·δt], [t, x, y], [t0, x0, y0], n)
```

```
#3: INTEGRAPH_3D(t0, x0, y0, z0, δt, n) :=
```

```
ITERATES([t + δt, x + R1(x, y, z)·δt, y + R2(x, y, z)·δt, z + R3(x, y, z)·δt], [t, x, y, z], [t0, x0, y0, z0], n)
```

Beispiel 4.1: Ein Räuber-Beute-Modell⁵: Ein Biotop wird von Katzen und Mäusen bevölkert.

α) Grundmodell:

Die Zahl der Mäuse ist bestimmt durch ihren natürlichen Zuwachs von jährlich 18% und ihre Abnahme durch ihre Feinde, die Katzen. Diese Abnahme ist proportional zur Anzahl der Katzen und zur

⁵Dieses Beispiel wurde im Rahmen der schriftlichen Maturaprüfung 1994 vom Verf. neben anderen Aufgaben in einer Klasse gestellt, in der DERIVE ständig (Schul-,Hausübungen,Prüfungsarbeiten) zur Verfügung stand. Dabei waren alle Ergebnisse und nichttrivialen Zwischenergebnisse niederzuschreiben und alle mit DERIVE ausgeführten Umformungen so ausführlich zu beschreiben, daß diese einwandfrei nachvollzogen werden konnten.

4 MEHRDIMENSIONALE WACHSTUMSPROZESSE – SYSTEMDYNAMIK

Anzahl der Mäuse (Proportionalitätsfaktor $b=0.005$). Der Zuwachs der Katzen ist proportional zur Zahl der Mäuse und zur Zahl der Katzen (Proportionalitätsfaktor $d=0.0001$). Die natürliche jährliche Abnahme betrage 15%. Anfangs gibt es 1500 Mäuse und 25 Katzen im betrachteten Biotop.

Stelle die entsprechenden Differenzengleichungen auf und untersuche die Langzeitentwicklung der Mäuse- und Katzenpopulation. Führe mittels Derive eine Simulation durch (mind. 50 Schritte). Beschreibe die Entwicklung beider Populationen.

β) Verbessertes Modell:

Da jede Katze ein bestimmtes Revier beansprucht, können im Biotop maximal 120 Katzen leben. Daher ist der Zuwachs der Katzen proportional zur Zahl der Mäuse und zum vorhandenen Wachstumspotential.

Schreibe wieder die entsprechenden Differenzengleichungen an und führe wie oben eine Simulation aus. Beschreibe wieder die Langzeitentwicklungen beider Populationen.

Stellt sich ein Gleichgewicht ein? Wenn ja, berechne es und erkläre, warum es sich einstellt.

γ) Gib eine Darstellung der Populationsentwicklungen des Grund- und des verbesserten Modells in einem Phasendiagramm. (Abszisse: Mäusepopulation, Ordinate: Katzenpopulation).

Was bedeuten im Phasendiagramm geschlossene Kurven, wie sind spiralförmige nach innen laufende Gebilde, wie nach außen laufende Spiralen zu interpretieren?

Ausführung mittels Integrgraph.2D⁶:

ad α) Grundmodell:

geg.: $x_0 = 1500/y_0 = 25/a = 0,18/b = 0,005/c = 0,15/d = 0,0001$

Iterationsgleichungen:

Zahl der Beutetiere $x_{n+1} = x_n + r_1(x_n, y_n) = x_n + a \cdot x_n - b \cdot x_n \cdot y_n$

Zahl der Räuber $y_{n+1} = y_n + r_2(x_n, y_n) = x_n - c \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot y_n$

Simulation⁷:

#4: "Räuberpopulation mit einer Beutepopulation - Grundmodell"

#5: $R1(x, y) := 0.18 \cdot x - 0.005 \cdot x \cdot y$, $R2(x, y) := -0.15 \cdot y + 0.0001 \cdot x \cdot y$

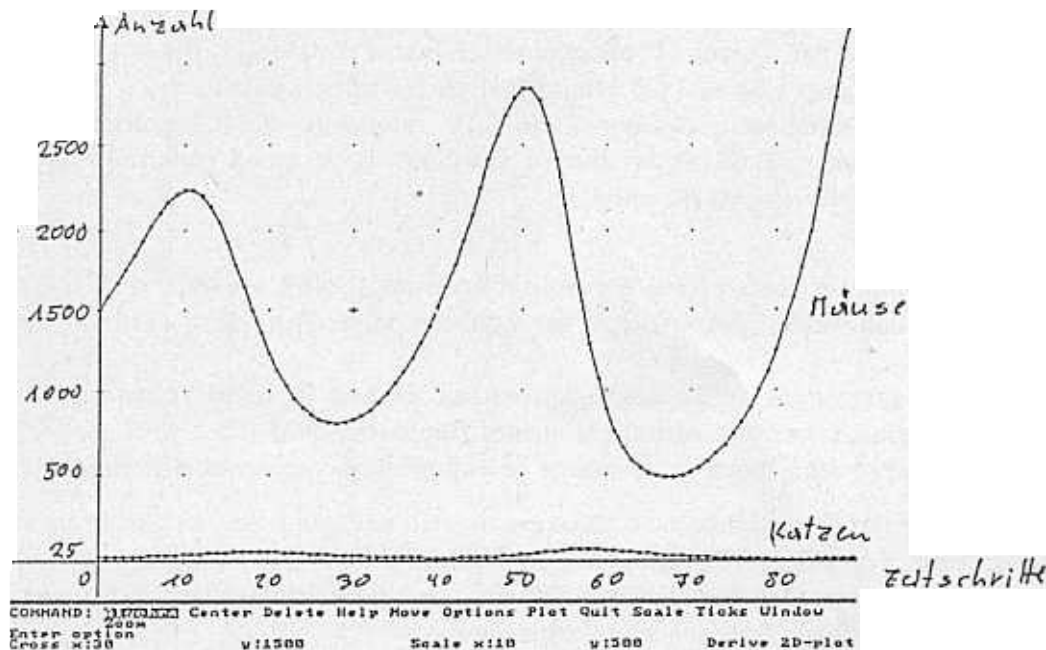
#6: INTEGRAPH_2D(0, 1500, 25, 1, 80)

#7: ZWEISPALTEN(m, s1, s2) := $\begin{bmatrix} m \\ s1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m \\ s2 \end{bmatrix}$

⁶Tatsächlich wurde von den ein „Vorläufer“ des INTEGRAPHen in Form eines Utility-Files verwendet, Dieses Utility-File wurde von Schülern und Lehrer gemeinsam bei der Bearbeitung des Kapitels Systemdynamik im Unterricht entwickelt, siehe DERIVE-Newsletters #17,S.23.

⁷Auf die Wiedergabe des bei der Simulation (nach Simplify von #10 anfallenden „Zahlenberges“ wurde hier verzichtet. Die Hilfsfunktion Zweispalten(m,s1,s2), dient zur Extraktion zweier Spalten, um zu plotbaren Tabellen zu kommen.

4 MEHRDIMENSIONALE WACHSTUMSPROZESSE – SYSTEMDYNAMIK



- Mäuse- und Katzenpopulation schwanken mit steigender Amplitude⁸;
- die Maxima der Katzenpopulation sind gegenüber den Maximas der Mäusepopulation verschoben, sie „hinken nach“;
- die „Wellenlänge“ liegt bei ca. 40 Zeitschritten.

ad β) Verbessertes Modell:

Iterationsgleichungen:

$$\text{Zahl der Beutetiere } x_{n+1} = x_n + r_1(x_n, y_n) = x_n + a \cdot x_n - b \cdot x_n \cdot y_n$$

$$\text{Zahl der Räuber } y_{n+1} = y_n + r_2(x_n, y_n) = x_n - c \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot (g - y_n)$$

Simulation:

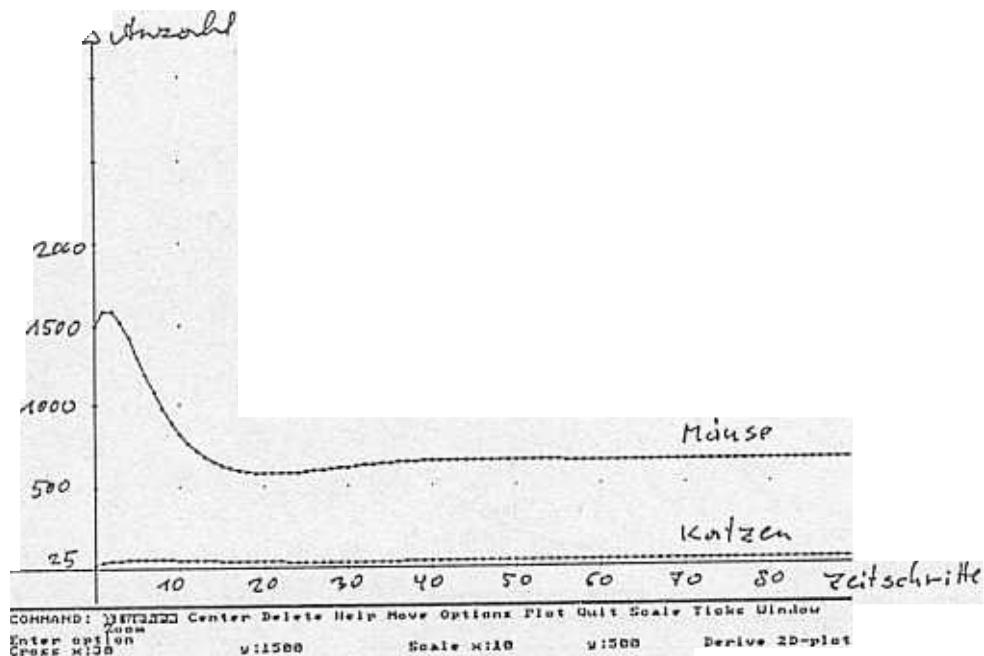
#8: "Räuberpopulation mit einer Beutepopulation - verbessertes Modell"

#9: [R1(x, y) := 0.18·x - 0.005·x·y, R2(x, y) := - 0.15·y + 0.0001·x·(120 - y)]

#10: INTEGRAPH_2D(0, 1500, 25, 1, 80)

⁸Als numerisches Verfahren wurde lediglich das EULER-CAUCHY-Verfahren verwendet, was insbesondere bei α) als problematisch anzusehen ist. Es muß aber angemerkt werden, daß der Sinn dieses Beispiels hauptsächlich im Modellbilden lag.

4 MEHRDIMENSIONALE WACHSTUMSPROZESSE – SYSTEMDYNAMIK



- es stellt sich nach ca. 40 Schritten ein Gleichgewichtszustand ein;
- die Mäusepopulation sinkt anfangs stark, die Katzenpopulation nimmt leicht zu.

Berechnung des Gleichgewichtszustandes (Fixpunktes):

Das Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn

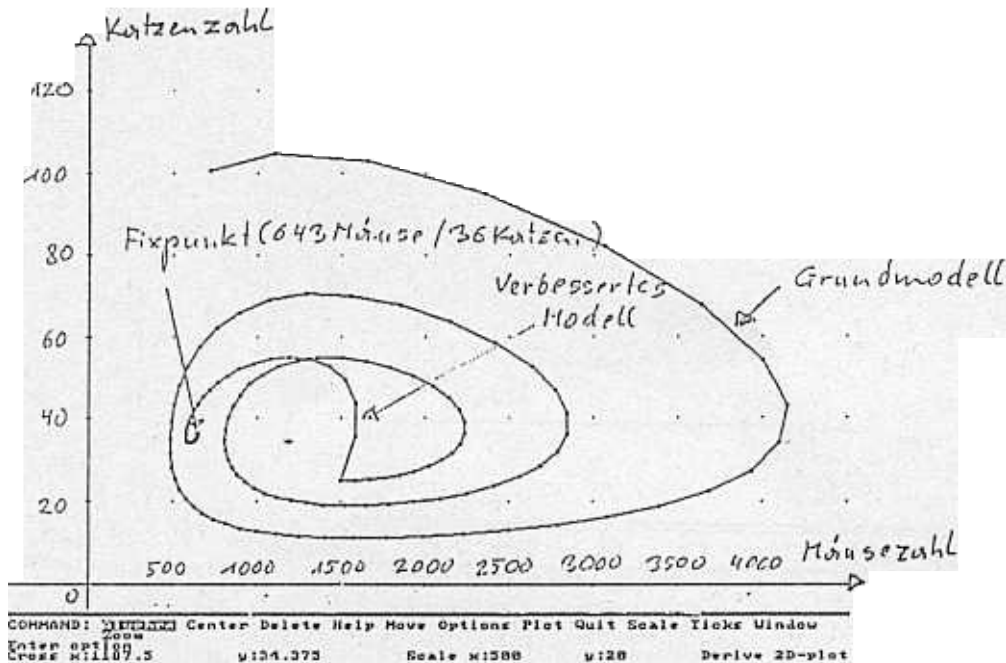
$$x_{n+1} - x_n = 0 \Rightarrow a \cdot x_n - b \cdot x_n \cdot y_n = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{a}{b} = 36$$

$$y_{n+1} - y_n = 0 \Rightarrow -c \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot (g - y_n) = 0 \Rightarrow \bar{x} \approx 643$$

Im Biotop herrscht dann ein Katzen-Mäuse-Gleichgewicht, wenn es von ca. 36 Katzen und 643 Mäuse bevölkert wird.

LITERATUR

ad γ) Phasendiagramm:



Im Phasendiagramm bedeuten:

- geschlossene Kurven: periodische Schwankungen
- spiralförmig nach innen laufende Kurven: Entwicklung zum Gleichgewicht
- spiralförmig nach außen laufende Kurven: Entwicklung zur Instabilität

Literatur

1. BOSSEL, H. (1994): Modellbildung und Simulation, 2.veränd.Auflage, Vieweg, Braunschweig; Wiesbaden.
2. HEUGL, H. (1995): Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (Gymnasien). – In: H.-Ch.Reichel, Computereinsatz im Mathematikunterricht, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim.
3. RICH, A.; RICH, J.; STOUTEMYER, D. (1994): Handbuch Derive, Version 3, Soft Warehouse, Inc. 3660 Waiialae Avenue, Suite 304, Honolulu, Hawaii.