BACK

Reinhard Köhler
Hessenbergstr. 51

34225 Baunatal

Computeralgebrasysteme im mathematischen Begriffsbildungsprozess

In der Diskussion über den Einsatz von Rechnern im MU wird als wesentliche Veränderung immer wieder deren Rolle als Kalkülprozessor betont. Vergegenwärtigt man sich die Kalkülüberfrachtung in der Praxis des MU, so wird deutlich, welche schlimme Situation entstehen kann, wenn dieser Rest an Mathematik dann auch noch dem Rechner zugewiesen wird.

Daher müssen Überlegungen im Zusammenhang mit dem Einsatz von Rechnern im MU weitergehende Ansätze verfolgen. Didaktische Vorschläge gingen bisher häufig dahin, im Bereich der Anwendungsmathematik unter dem Modellbildungsaspekt kalkülaufwendige Themen aufzugreifen, die ohne Rechner kaum zu behandeln wären.

Weniger beachtet wurde, daß es in zentralen Feldern der Didaktik, wie etwa im Bereich des mathematischen Begriffslernens, dem m. E. ohnehin nicht die notwendige Aufmerksamkeit geschenkt wird, ebenfalls vielfältige Einsatzmöglichkeiten für Rechner gibt. Dies gilt umso mehr, als die reine Kalkülmathematik das Potential moderner Rechner kaum ausgereizt.

Computeralgebrasysteme sind mehr als nur Kalkülwerkzeuge.

Während die üblichen Schul-Taschenrechner mit ihrer Möglichkeit zur numerischen Auswertung von Standardfunktionen und -operationen durchaus als reine 'Rechenknechte' zu bewerten sind, verfügen Computeralgebarsysteme (CAS) neben ihrer erheblichen Kalkülpotenz (Termumformungen, Gleichungslösen, Graphiken, Ableiten, Integrieren, Matrizenoperationen, etc.) über deutlich weitergehende Leistungsmerkmale:

a. Der interaktive Wechsel zwischen Symbolverarbeitung (Algebra, Analysis, ...), Numerischer Mathematik, Graphik und den - mitunter eingeschränkten - Programmiermöglichkeiten von CAS erlaubt <u>das durchgängige Arbeiten mit verschiedenen Ausprägungen mathematischer Begriffe</u>.

b. CAS werten symbolische Ausdrücke aus, deren Syntax nach den Regeln einer formalen Sprache gebildet werden: Man kann also <u>mit Hilfe eines CAS mathematische Zusammenhänge beschreiben</u>.

c. <u>CAS erlauben modulares Arbeiten</u>: Man stellt Teile einer Begriffsbildung, eines Lösungsprozesses, etc. als mögliches Objekt im CAS (zum Beispiel als Funktionsausdruck, Term o. ä.) dar und verwendet es in anderen Zusammenhängen, entwickelt das Objekt weiter, setzt verschiedene Objekte zusammen und gelangt damit zu einer höheren Stufe im Prozess des mathematischen Arbeitens.

d. CAS sind ständiger Dialogpartner beim mathematischen Arbeiten: Man kann Dokumente erstellen, Dialogsequenzen abspeichern und später weiterarbeiten, Ergebnisse austauschen und zusammenfügen etc. Damit stehen also zentrale Vorteile eines informationsverarbeitenden Systems zur Verfügung. Die Möglichkeiten könnte man in etwa als 'mathematische Formal-Textverarbeitung' beschreiben.

Fazit: Ein CAS ist kein einfaches Kalkülwerkzeug, das man gelegentlich verwendet und dann wieder aus der Hand legt, sondern ein Werkzeugkasten, den man konsequent in das mathematische Arbeiten einbezieht.

CAS im mathematischen Begriffsbildungsprozess: Die Einführung des Begriffes Differenzierbarkeit.

Der MU lebt von einer Vielzahl von Begriffsbildungen. In den oberen Klassen der Sek. I und in der Sek. II sind einige von grundlegender Bedeutung: Funktion, Grenzwert, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit. Am Beispiel des Begriffes Differenzierbarkeit sollen im folgenden die Möglichkeiten eines CAS (hier: DERIVE) zur Unterstützung des Begriffsbildungsprozesses erörtert werden.

Ich muß voranschicken, daß der folgende Vorschlag voraussetzt, daß Schüler im Umgang mit DERIVE hinreichend vertraut sind. Sie müssen insbesondere Funktionsausdrücke als Beschreibungsmittel einsetzen können, und das modulare Arbeiten mit diesen Objekten muß geübt sein. Dies wird in der Regel dann der Fall sein, wenn DERIVE bereits über einen Zeitraum von etwa einem halben Jahr konsequent eingesetzt wurde. Nützlich ist die Kenntnis rekursiver Ausdrücke, wobei dies aber auch an den notwendigen Stellen erarbeitet werden kann.

Die im folgenden beigefügten DERIVE-Dialoge sind als Vorlage-Beispiele gedacht, die im Unterricht in dieser oder ähnlicher Form selbst erstellt werden sollen. Daher ist in jedem Fall, auch wenn die Schüler im Umgang mit DERIVE geübt sind, hinreichend Zeit für die Arbeit mit dem Rechner vorzusehen. Auf die durchgängige Darstellung von Übungsbeispielen wird hier verzichtet.

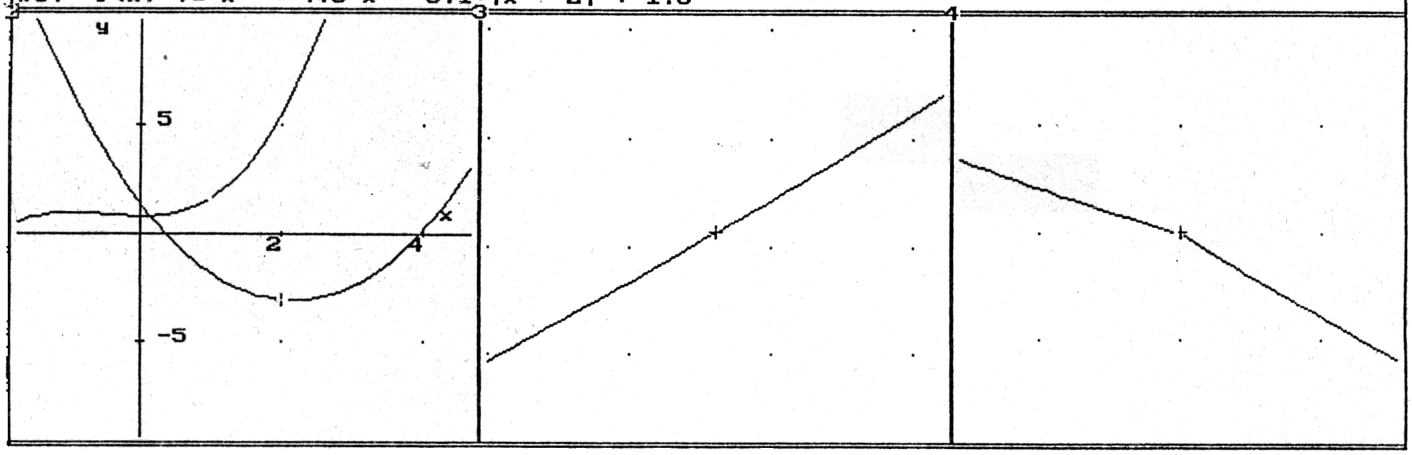
Unter den verschiedenen analytischen und geometrischen Zugängen zum Begriff der Differenzierbarkeit wird hier ein Ansatz gewählt, der den Aspekt der linearen Approximation zugrunde legt.

a. Zum Einstieg in die UE verwendet man DERIVE zunächst als Funktionenmikroskop (vgl. KIRSCH, 1979) und ermittelt den Term der linearen Funktion, deren Graph den Vergrößerungsprozess idealisiert. Die Untersuchung kann man z. B. an einfachen ganzrationalen Funktionen vornehmen. An geeigneten Gegenbeispielen kann man die Frage aufgreifen, ob es stets gelingen kann, zu einer linearen Approximation an einer gegebenen Stelle zu kommen.

#1: "Funktionenmikroskop"

#2: $F(x) := \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{53}{64}$

#3: $F(x) := x^2 - 4.3\cdot x - 0.1\cdot|x - 2| + 1.6$



b. Es schließt sich die Konstruktion der DERIVE-Funktionen **SEKANTEN_TERM(x, x1, x0)** und **TANGENTEN_TERM(x, x0)** an. Dabei findet man die erste mit Hilfe der Zweipunkteform der Geradengleichung und die zweite durch Beschreibung des Grenzprozesses mit Hilfe der Funktion **LIM** in DERIVE. Das jeweils erste Argument dieser Funktionsausdrücke ermöglicht, die Termvariable frei zu wählen (z. B. a statt x). Man kann ggf. darauf verzichten.

#7: "Sekanten-Approximation"

#8: F(x) :=

#9: $\text{SEKANTEN\_TERM}(x, x1, x0) := F(x0) + \frac{F(x1) - F(x0)}{x1 - x0}\cdot(x - x0)$

#10: $F(x) := x^2$

#11: SEKANTEN_TERM(x, 1, 2)

#12: $3\cdot x - 2$

#13: "Tangenten-Approximation"

#14: $\text{TANGENTEN\_TERM}(x, x0) := F(x0) + \left[\lim_{x\to x0} \frac{F(x) - F(x0)}{x - x0}\right]\cdot(x - x0)$

#15: "Eine alternative Definition:"

#16: $\text{TANGENTEN\_TERM}(x, x0) := \lim_{x1\to x0} \text{SEKANTEN\_TERM}(x, x1, x0)$

#17: F(x) := SIN(x)

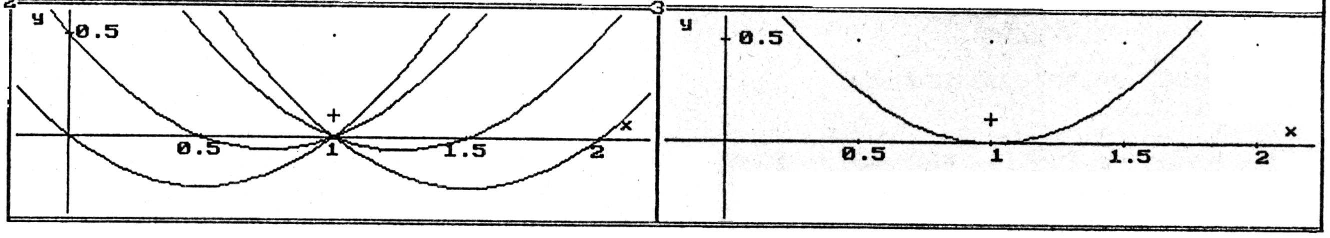
#18: TANGENTEN_TERM(x, 0)

#19: x

c. Man muß noch überlegen, wie gut diese lineare Approximationen (durch Sekante bzw. Tangente) ist, und ob es noch bessere gibt. Zur Übung kann man die Güte der entwickelten linearen Approximationen an verschiedenen Beispielen untersuchen: $\sqrt[4]{8.9}$, $\sin(0.1\cdot\pi)$, o. ä. Anschließend betrachtet man die verschiedenen Fehlerfunktionen, die sich durch eine Sekanten- bzw. Tangentenapproximation ergeben.

#22: "Lineare Approximationen zu gegebenen Funktionen"
#23: F(x) := $\sqrt{x}$
#24: TANGENTEN_TERM(x, 9)
#25: $\frac{x + 9}{6}$
#26: APPROXI(x) := $\frac{x + 9}{6}$
#27: APPROXI(8.9)
#28: 2.98333
#29: ""
#30: F(x) := SIN(x)
#31: TANGENTEN_TERM(x, 0)
#32: x
#33: APPROXI(x) := x
#34: APPROXI(0.1·π)
#35: 0.314159

#38: "Untersuchung der Güte der Linearen Approximation"
#39: F(x) := x^2
#40: "Der folgende Ausdruck erzeugt eine Liste von Termen der Fehler-Funktionen"
#41: "   F(x)-SEKANTEN_TERM(x, x0, x1)   mit x0=1 und x1=0, 0.5, ...2"
#42: VECTOR(F(x) - SEKANTEN_TERM(x, 1, a), a, 0, 2, 0.5)
#43: $\left[x^2 - x, \frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{2}, ?, \frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3}{2}, x^2 - 3 \cdot x + 2\right]$
#44: "Das Fragezeichen wird durch den entsprechenden Tangententerm gefüllt:"
#45: F(x) - TANGENTEN_TERM(x, 1)
#46: $x^2 - 2 \cdot x + 1$



d. Die Schüler müssen jetzt herausarbeiten, daß der Differenzenquotient in der Funktion **SEKANTEN_TERM(x, x1,x0)** und dessen Grenzwert in der Funktion **TANGENTEN_TERM(x, x0)** entscheidenden Einfluß auf die Ergebnisse hat. Man kommt damit zu den wichtigen Begriffen mittlere und lokale Änderungsrate, sowie der Ableitung einer Funktion an einer Stelle.

#53: "Differenzenquotient, mittl. und lokale Änderungsrate, Ableitung:"
#54: F(x) := x^3
#55: DIFFQUOT(x1, x0) := $\frac{F(x1) - F(x0)}{x1 - x0}$
#56: DIFFQUOT(a, 1)
#57: $a^2 + a + 1$
#58: MITTL_ÄND_RATE(x1, x0) := DIFFQUOT(x1, x0)
#59: LOK_ÄND_RATE(x0) := $\lim_{x1 \to x0}$ MITTL_ÄND_RATE(x1, x0)
#60: LOK_ÄND_RATE(2)
#61: 12
#62: ABLEITUNG(x0) := LOK_ÄND_RATE(x0)
#63: F(x) := $-\frac{1}{\sqrt{x}}$
#64: ABLEITUNG(a)
#65: $\frac{0.5}{a^{1.5}}$

e. Als weitere Übung - auch zur Vertiefung des Approximationsgedankens - bietet sich die Erarbeitung des NEWTON-Verfahrens an, das rekursiv formuliert werden kann.

#70: "Herleitung des NEWTON-Verfahrens"

#71: F(x) :=

#72: "Tangenten-Term an der Stelle x0:"

#73: TANGENTEN_TERM(x, x0) = 0

#74: "Auflösen nach x"

#75: $x = x0 - \dfrac{F(x0)}{\lim\limits_{x \to x0} \dfrac{F(x) - F(x0)}{x - x0}}$

#76: $NEU(x0) := x0 - \dfrac{F(x0)}{\lim\limits_{x \to x0} \dfrac{F(x) - F(x0)}{x - x0}}$

#77: "Rekursive Iteration:"

#78: $F(x) := x^2 - 2$

#79: NEWTON(x0, ε) := IF(|NEU(x0) - x0| < ε, x0, NEWTON(NEU(x0), ε))

#80: NEWTON(1, 0.0001)

#81: 1.41421

f. Die Erarbeitung des Begriffes der Ableitungsfunktion schließt sich an, und die Schüler lernen die DERIVE-Funktion **DIF** kennen, die Ableitungsterme bestimmt. DERIVE vereinfacht Ausdrücke wie z. B. **DIF(x^2, x)** zum Term 2x, wobei der Ausdruck beim Editieren in die Differentialschreibweise umgewandelt wird. Es stellt sich die Frage, ob und wie man eine solche Funktion selbst konstruieren kann. Dies geschieht mit Hilfe der Funktion **FW(t, x, x0)**, die zu einem Funktionsterm t in der Varibalen x den Funktionswert an der Stelle x0 bestimmt. Dadurch wird es möglich, beliebige Terme als Argumente einer Funktion zuzulassen, was ja bei der Funktion DIF notwendig ist. Höhere Ableitungen können mit Hilfe eines rekursiven DERIVE-Ausdruckes bestimmt werden.

#85: "Ableitungsfunktion"

#86: "   Hilfsfunktion FW(t,x,x0)"

#87: $FW(t, x, x0) := \lim\limits_{x \to x0} t$

#89: $FW(x^2, x, 4)$

#90: 16

#91: "Die Ableitung der Funktion mit dem Term t in der Variablen x an der Stelle a"

#92: $DIFFQUOT(t, x, x1, x0) := \dfrac{FW(t, x, x1) - FW(t, x, x0)}{x1 - x0}$

#93: $ABLEITUNG(t, x, x0) := \lim\limits_{x1 \to x0} DIFFQUOT(t, x, x1, x0)$

#94: $ABLEITUNG(x^2, x, a)$

#95: $2 \cdot a$

#96: ABLEITUNGSFUNKTION(t, x) := ABLEITUNG(t, x, x)

#97: $ABLEITUNGSFUNKTION(x^2, x)$

#98: $2 \cdot x$

#99: "Nachbildung der DERIVE-Funktion DIF"

#100: DIF1(t, x) := ABLEITUNGSFUNKTION(t, x)

#101: DIF1(SIN(x), x)

#102: COS(x)

#103: "Höhere Ableitungen bestimmt mit Hilfe eines rekursiven Ausdruckes"

#104: DIF_N(t, x, n) := IF(n = 0, FW(t, x, x), DIF_N(DIF1(t, x, x), x, n - 1))

#105: $DIF\_N(x^2, x, 2)$

#106: 2

g. Es ist leicht möglich, die Funktionen **SEKANTEN_TERM** und **TANGENTEN_TERM** mit Hilfe von **FW** so erweitern, daß der Funktionsterm als weiteres Argument einbezogen ist. Wegen des höheren Anforderungsniveaus wurde in der Einstiegsphase zunächst noch darauf verzichtet. Entsprechend kann die Funktion **NEWTON** erweitert werden.

#107:"Ergänzung: SEKANTEN_TERM und TANGENTEN_TERM mit dem Funktionsterm t"

#108:"   als weiterem Argument"

#109: $\text{SEKANTEN\_TERM}(t, x, x1, x0) := \text{FW}(t, x, x0) + \dfrac{\text{FW}(t, x, x1) - \text{FW}(t, x, x0)}{x1 - x0}\cdot(x - x0)$

#110: $\text{TANGENTEN\_TERM}(t, x, x0) := \text{FW}(t, x, x0) + \lim\limits_{x1 \to x0} \text{SEKANTEN\_TERM}(t, x, x1, x0)$

#111:TANGENTEN_TERM(SIN(x), x, 0)

#112:x

#113:"Ergänzung: NEWTON-Verfahren mit dem Funktionsterm t"

#114:"   als weiterem Argument"

#115: $\text{NEU}(t, x0) := x0 - \dfrac{\text{FW}(t, x, x0)}{\text{ABLEITUNG}(t, x, x0)}$

#116: $\text{NEWTON}(t, x0, \epsilon) := \text{IF}(|\text{NEU}(t, x0) - x0| < \epsilon, x0, \text{NEWTON}(t, \text{NEU}(t, x0), \epsilon))$

#117: $\text{NEWTON}(x^2 - 2, 1, 0.001)$

#118:1.41421

h. In leistungsfähigeren Lerngruppen oder mit interessierten Schülern kann man den Gedanken der Approximation noch weiterführen, indem man z. B. versucht, quadratische oder kubische Approximationen zu einer Funktion f zu finden, bei denen die Funktionswerte und die Ableitungen an einer gegebenen Stelle x0 übereinstimmen. Man kommt also zur TAYLOR-Entwicklung. Eine vertiefende Behandlung mit analytischer Herleitung und allgemeiner Fehlerabschätzung ist an dieser Stelle noch nicht möglich, sollte aber zu einem späteren Zeitpunkt (im Rahmen der Integralrechnung) erfolgen (vgl. BARZEL, 1992).

#122:"TAYLOR-Approximation: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion P, die an einer"

#123:"Stelle x0 im Funktionswert und in n Ableitungen mit einer gegebenen Funktion F"

#124:"übereinstimmt."

#125:"Hilfsfunktion: ABL_N(t,x,x0,n) liefert den Wert der n-ten Ableitung zur Funktion"

#126:"mit dem Term t in der Variablen x an der STelle x0"

#127: $\text{ABL\_N}(t, x, x0, n) := \text{FW}\left[\left[\dfrac{d}{dx}\right]^n t, x, x0\right]$

#128:"Man kann z.B. mit n=3 und x0=0 beginnen. Zu den 4 Bestimmungsgleichungen kann "

#129:"versucht werden, ein Polynom 3. Grades zu finden."

#130: $P(x) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

#131:F(x) := SIN(x)

#132:"Die Bestimmungsgleichungen:"

#133:P(0) = F(0)

#134:ABL_N(P(x), x, 0, 1) = ABL_N(F(x), x, 0, 1)

#135:ABL_N(P(x), x, 0, 2) = ABL_N(F(x), x, 0, 2)

#136:ABL_N(P(x), x, 0, 3) = ABL_N(F(x), x, 0, 3)

#137:[P(0) = F(0), ABL_N(P(x), x, 0, 1) = ABL_N(F(x), x, 0, 1), ABL_N(P(x), x, 0, 2) = ABL ...]

#138: $\left[a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = 1, d = 0\right]$

i. Schließlich müssen die wichtigsten Ableitungsregeln und die zentralen Sätze der Analysis behandelt werden. DERIVE wird in dieser Phase ein wichtiges Hilfsmittel zum Entdecken von Zusammenhängen sowie zum Generieren zur Untersuchung und zur Bestätigen von Vermutungen sein.

#139:""

#140:""

#141:"Ableitungsregeln: Bestätigung mit DERIVE"

#142:F(x) :=

#143:G(x) :=

#144: $\frac{d}{dx}\ (F(x) + G(x))$

#145: $\frac{d}{dx}\ F(x) + \frac{d}{dx}\ G(x)$

#146: $\frac{d}{dx}\ (F(x)\cdot G(x))$

#147: $G(x)\cdot\frac{d}{dx}\ F(x) + F(x)\cdot\frac{d}{dx}\ G(x)$

#148: $\frac{d}{dx}\ \frac{F(x)}{G(x)}$

#149: $\frac{G(x)\cdot\frac{d}{dx}\ F(x) - F(x)\cdot\frac{d}{dx}\ G(x)}{G(x)^2}$

#167:"Ein Fehlversuch:"

#168: $\frac{d}{dx}\ F(G(x))$

#169: $\left[\frac{d}{dx}\ G(x)\right]\cdot \lim_{@1\to G(x)} \frac{d}{d\ @1}\ F(@1)$

#170:"Ersetze f(x) durch konkrete Terme:"

#171: $\frac{d}{dx}\ G(x)^2$

#172: $2\cdot G(x)\cdot\frac{d}{dx}\ G(x)$

#173: $\frac{d}{dx}\ \mathrm{SIN}(G(x))$

#174: $\mathrm{COS}(G(x))\cdot\frac{d}{dx}\ G(x)$

#175: $\frac{d}{dx}\ \frac{1}{G(x)}$

#176: $-\frac{\frac{d}{dx}\ G(x)}{G(x)^2}$

Erfahrungen mit der Umsetzung des Konzeptes

Das vorgestellte Konzept entstand aus den Erfahrungen in mehreren Einführungskursen Analysis in der Jahrgangsstufe 11. (vgl. auch KÖHLER, 1990). In der vorliegenden Form soll es erst im Schuljahr 1995/96 erprobt werden. Der Vorschlag wurde insbesondere aus der Überzeugung heraus entwickelt, daß es wenig Sinn macht, Differenzierbarkeit ohne DERIVE einzuführen und dann erst Ableitungen mit DERIVE bestimmen.

Als Vorteile des Ansatzes sehe ich, daß die verschiedenen Begriffe, die man üblicherweise im Zusammenhang mit Differenzierbarkeit verwendet, vom Schüler selbst ganz konkret als DERIVE-Funktion modelliert werden müssen. Dies erfordert m. E. eine intensivere und tiefergehende Auseinandersetzung mit der Begriffsbildung als dies normalerweise der Fall ist.

Man hat bei der Umsetzung dieser und ähnlicher Konzepte insgesamt mit einer Reihe Problemen zu kämpfen, die letztlich in der etablierten Lehr- und Lernkultur des Faches Mathematik begründet sind.

Zunächst muß ein solches Konzept in bestehende Curricula eingebunden sein, und das verlangt, daß die anderen Fachlehrkräfte der Schule zur Kooperation bereit sind.

Der Arbeitsaufwand ist im Moment hoch einzuschätzen, weil es bislang nur wenige Materialien gibt. Hier ist noch viel Pionierarbeit zu leisten.

Nach wie vor ist es problematisch, geeignete Rahmenbedingungen zu schaffen, denn häufig wird der Rechnereinsatz zum "Wandertag Computerraum". Bis sich portable Systeme wie etwa der für den Herbst 1995 angekündigte Taschencomputer TI-92, auf dem DERIVE fest implementiert ist, etabliert haben werden, wird wohl noch einige Zeit vergehen. Für die erfolgreiche Umsetzung von Unterrichtsvorschlägen wie dem hier vorgestellten ist es wichtig, daß allen Schülern möglichst durchgängig ein CAS zur Verfügung steht.

Es hat sich gezeigt, daß die Anforderungen für die Schüler steigen, man muß also hinreichend Zeit für Übungen und Vertiefungen vorsehen. Die Gefahr, daß man zu schnell vorgeht, ist nicht zu unterschätzen, zumal sich bei Schülern durchaus Ängste entwickeln, man müsse Mathematik mit <u>und</u> ohne DERIVE beherrschen.

Durch den Einsatz von Rechnern kommen neue Verfahren und Arbeitstechniken hinzu, die der Ebene der Fertigkeiten zuzurechnen sind. Insbesondere wird auch der Kalkülvorrat der Schüler sicherlich steigen. Es würde aber nur wenig Sinn machen, wenn sich der Unterricht weitgehend auf dieser Ebene bewegte. Vielmehr müssen künftige Curricula diese höhere Vielfalt angemessen aufarbeiten und begriffliche Zusammenhänge hervorheben und deutlich machen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß begrifflich orientierte Ansätze des Einsatzes von CAS im MU durchaus erfolgversprechend sind, wenn man die beschriebenen Gefahren sieht und berücksichtigt. Die bislang vorliegenden und im Rahmen der verschiedenen DERIVE-Tagungen - insbesondere in Krems(Östreich) 1922 und 1993 (vgl. BÖHM, 1992 sowie HEUGL und KUTZLER, 1994) diskutierten Erfahrungen zeigen, daß man auf einem vernünftigen Wege ist, auch wenn noch mancherlei Schwierigkeiten zu meistern sind.

Wenn man sowohl den Rechnereinsatz und als auch eine Verminderung der Kalkülorientierung will, müssen, um den originären Zielen des MU gerecht zu werden, begriffsorientierte Ansätze stärker in den Vordergrund treten.

Literatur

BARZEL, Bärbel: Taylor Series Expansion. In: BÖHM, Josef, 1992. S. 57-62.

BÖHM, Josef(Hrsg.): Teaching Mathematics with DERIVE. Chartwell-Bratt; Bromley (Kent, U. K.), 1992.

HEUGL, Helmut und KUTZLER, Bernhard (Hrsg.): DERIVE in Education. Chartwell-Bratt; Bromley (Kent, U. K.), 1994.

KIRSCH, Arnold: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. MU 25 (1979) 3, S. 25-41.

KÖHLER, Reinhard: Bericht über einen Unterrichtsversuch zum Einsatz von DERIVE im Analysisunterricht. In: DÖRFLER, u. a. (Hrsg.): Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Band 21. Computer-Mensch-Mathematik. Wien 1991. S. 151-158.