BACK

Manfred KRONFELLNER, Wien

Analysisunterricht: Quo vadis?

1 Vorbemerkungen und kurzer Überblick

Die Differential- und Integralrechnung wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts im deutschen Sprachraum zum Pflichtstoff der meisten höheren Schulen (d. h. Schulen mit Abitur). Bis ca. 1960 hat sich - bedingt durch die Weltkriege - nicht viel geändert. Erst Ende der Fünfzigerjahre führte der "Sputnikschock" in den USA, und später dann in Westeuropa, zu einer Reform des Schulwesens und insbesondere des Mathematikunterrichts ("New Math"). Man versuchte, die Kluft zwischen Universitätsmathematik und Schulmathematik zu verkleinern. Da die Universitätsmathematik in dieser Zeit sehr vom Bourbaki-Stil geprägt war, führte die Orientierung der Schulmathematik an der Universitätsmathematik zu einer starken Betonung von Theorie, Deduktion, exakten Begriffsbildungen, Beweisen, Mengenlehre und Aussagenlogik.

Unzufriedenheit mit der New Math führte zum Nachdenken über mögliche Alternativen im Mathematikunterricht: Eine stärkere Anwendungsorientierung und die genetische Methode begannen ab dem Ende der Siebzigerjahre das Bild des Mathematikunterrichts zu prägen.

Nun steht mit dem Computer und vor allem mit Computeralgebrasystemen die nächste Herausforderung für den Mathematikunterricht bzw. für die Mathematikdidaktik bevor.

Obwohl mir - rückblickend betrachtet - die angeführten Umorientierungen einleuchtend erscheinen, bin ich aber auch der Überzeugung, daß diese früheren Stufen nicht völlig obsolet sind; sie wollten durchaus legitimen Ansprüchen genügen. Für eine curriculare Entwicklungsarbeit kann ein Blick in die Vergangenheit in zweifacher Weise hilfreich sein: zum ersten soll er dazu beitragen, nicht in extreme Einseitigkeiten zu verfallen, zum zweiten soll versucht werden, positive Aspekte früherer Vorschläge in der Zukunft nicht aus den Augen zu verlieren, sondern so weit wie möglich mit zu berücksichtigen.

2 Analysisunterricht: ein Rückblick

2.1 Traditioneller Analysisunterricht

Dieser bestand weitgehend aus dem Bearbeiten von typisch schulmathematischen Aufgabenstellungen. Zentrale Begriffe und die benötigten Regeln wurden meist relativ kurz und am Anfang des Lehrganges bereitgestellt.

2.2 Reform des Analysisunterrichts

Die Theorie wurde - wie für die New Math typisch - ins Zentrum des Analysisunterrichts gerückt: präzise Definitionen vom Anfang an, viele Begriffe, viele Sätze samt Beweise; erst nach einem langen theoretischen Vorlauf kamen Aufgaben.

2.3 Vereinfachungsversuche

Die großen Schwierigkeiten, die die Schüler mit der sehr theoretischen Analysis hatten, veranlaßten Didaktiker zu verschiedenen Versuchen, diese Schwierigkeiten zu mildern - allerdings vorerst weitgehend noch unter Beibehaltung der Forderung nach Exaktheit.

"Vereinfachte Analysis" ("Lipschitz-Analysis"): Zentrale Begrife wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit wurden durch die "L-Stetigkeit" und "L-Differenzierbarkeit" ersetzt - in der Hoffnung, daß die technischen Schwierigkeiten dadurch etwas gemildert werden und den Schülern einen leichteren Zugang zu diesen Begriffen ermöglicht wird.

Nonstandard Analysis: Durch die von A. Robinson in den Sechzigerjahren entwickelte Nonstandard Analysis wurde Leibniz' Idee der Differentiale im Nachhinein gerechtfertigt. In den Siebzigerjahren wurden vor allem in den USA Versuche unternommen, dem Analysisunterricht die Idee der Nonstandard Analysis zugrunde zu legen.

Betonung des Aspekts der linearen Approximation: Die bessere Möglichkeit der graphischen Veranschaulichung, beweistechnisch leichtere Handhabung und die Verallgemeinerungsmöglichkeiten in Richtung höhere (moderne) Mathematik sprechen für diesen Zugang.

Grenzwertfreie Zugänge: Hier wurde versucht, einen Analysisunterricht zu konzipieren, in dem der Grenzwertbegriff überhaupt nicht mehr explizit vorkommt.

2.4 Abkehr von überzogenen Exaktheitsforderungen

In den Siebzigerjahren erkannte man schließlich, daß die zuvor beschriebenen Alternativen nicht die Lösung brachten; es lag am zu hohen Exaktheitsanspruch, der offensichtlich nicht durchzuhalten war. Vor allem den mit dem Theoriefrust einhergehenden Motivationsproblemen versuchte man durch Aufzeigen der Anwendbarkeit der Mathematik zu begegnen. ("Anwendungswelle")

Ebenfalls als Reaktion auf die überzogenen Exaktheitsansprüche wurde die genetische Methode wiederentdeckt und neu belebt. In vielen didaktischen Publikationen wurden Vorschläge zur Realisierung des genetischen Prinzips unterbreitet; zum Analysisunterricht sei dabei - neben den Arbeiten von Werner Blum und Arnold Kirsch - vor allem Roland Fischers Idee der nachträglichen Exaktifizierung erwähnt:

- Ein anschaulich-naiver Grenzwertbegriff am Anfang
- eine anfängliche Beschränkung auf Polynomfunktionen (bei denen man mit dem naiven Grenzwertbegriff vorerst das Auslangen finden kann)
- möglichst rasch zu weiteren Anwendungen
- Beim Versuch, auch andere Funktionen zu differenzieren, erweist sich der bisherige Grenzwertbegriff als zu unpräzise; die Sinnhaftigkeit einer exakteren Begriffsbildung kann auf diese Weise und zu diesem Zeitpunkt dem Schüler (eher) einsichtig gemacht werden.

3 Analysisunterricht im Zeitalter des Computers

Die Verwendung von selbst geschriebenen Computerprogrammen im Unterricht führte (kurzfristig) zu einem starken Interesse an numerischer Mathematik (Fehlerrechnung, Fehlerfortpflanzung, Konvergenzgeschwindigkeit, ...). Rascher als man damals glaubte wurde dies durch kommerzielle Software, insbesondere durch Computeralgebrasysteme, überholt. Die Verwendung dieser Systeme konfrontiert uns heute mit einer Menge von Fragen, z. B. in Hinblick auf die Unterrichtsmethodik, die Prüfungssituation sowie auf die Lehreraus- und -fortbildung. Vor allem aber werden sie curriculare Auswirkungen haben. In diesem Zusammenhang wurden in der letzten Zeit einige Ideen, meist in Form didaktischer Prinzipien formuliert, in die Diskussion eingebracht.

3.1 White-Box-Black-Box-Prinzip (vgl. Buchberger 1989)

In der White-Box-Phase soll der Schüler (ohne Computer) einen Begriff/ein Verfahren verstehen und in einfachen Zusammenhängen anwenden können. Danach - in der Black-Box-Phase - soll das Verfahren insb. unter Verwendung des Computers angewandt werden, ohne sich jedesmal alle Einzelheiten und Begründungen vergegenwärtigen zu müssen.

Dieses Prinzip gestattet eine große Bandbreite von Akzentuierungen, je nachdem, wie man "White Box" versteht:

- nur heuristische Vorstellung eines Begriffs (z. B. unbegrenztes Nähern, Tangentensteigung, ...)
- Präzise Definitionen (mit oder ohne heuristische Vorstufen), aber keine praktikablen Verfahren bzw. Regeln (vgl. SIN-Taste am Taschenrechner!)
- Präzise Definitionen und Regeln/Sätze (ggf. incl. Beweise)

Natürlich ist dieses Prinzip - ebenso wie die folgenden - auch ohne Computer realisierbar: gerade von schwächeren Schülern wird vieles - nach Verdrängen der White-Box-Phase - als Black Box angewandt (z. B. $f'(x)=0$ bei Extremwertaufgaben, u.v.a.).

3.2 Gerüstprinzip ("scaffolding principle"; vgl. Kutzler 1994)

Lücken bei grundlegenden mathematischen Fertigkeiten führen bei händischem Rechnen meist dazu, daß später komlexere Aufgaben nicht bewältigt werden können. Kutzler sieht für solche Schüler eine Chance, unter Verwendung des Computers (mehr oder weniger als Black Box) dennoch solche Aufgaben zu bewältigen (und ggf. Lücken in den niedrigeren Fertigkeiten erst später zu füllen).

3.3 Black-Box-White-Box-Prinzip

Insbesondere in Zusammenhang mit Vorschlägen zu experimenteller Mathematik wird dieses Prinzip manchmal angeführt. Anhand verschiedener Eingaben soll die Bedeutung bestimmter Befehle und damit der dahinterstehenden mathematischen Begriffe und Regeln erkannt werden. Die Bedeutung dieses Vorgehens liegt m. M. weniger in der Erarbeitung eines bestimmten Begriffes, sondern im Praktizieren einer "Forschungshaltung": Aufstellen einer Vermutung - Überprüfung - Modifikation der Vermutung - neuerliche Überprüfung - ...

3.4 Prinzip der Förderung von Übersetzungsqualifikationen

Bei den drei Tätigkeiten "Darstellen - Operieren - Interpretieren" dominierte bislang das Operieren bei weitem. Dieses sollte mehr oder weniger dem Computeralgebrasystem übertragen und der zeitliche Freiraum für Aufgaben zum Darstellen und Interpretieren genützt werden.

Oft wurden die Grenzen der Möglichkeiten beim Operieren auch als die Grenzen des im Mathematikunterricht Machbaren betrachtet. Durch das Übertragen des Operierens an den Computer gewinnen Ziele wie Darstellen und Interpretieren an Eigenständigkeit und sollten dadurch eher als jeweils eigenständiger Aufgabenstellungen wert erachtet werden, z. B. Aufgaben, die *nur im Aufstellen* eines mathematischen Modells (etwa einer Differentialgleichung) besteht.

Es ist dabei aber auch zu beachten, daß durch Reduktion bzw. Wegfall des Operierens gerade schwachen Schülern die Möglichkeit genommen wird, durch Reproduktion niedriger Fertigkeiten einen positiven Abschluß in Mathematik zu erreichen. Die bisherigen Erfahrungen in einem österreichischen Forschungsprojekt zum Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht bestätigen die Befürchtungen, daß die Schere zwischen guten und schlechten Schülern durch Computeralgebraeinsatz größer wird.

3.5 Werden theoretische Betrachtungen durch Computeralgebra im Unterricht obsolet?

Durch Verwendung von Computeralgebra als Black Box (mit oder ohne White Box davor) wird offenkundig, daß die Behandlung eines Theorieblocks vor Anwendungen keine zwingende Notwendigkeit darstellt. Dadurch soll aber die Theorie nicht obsolet werden, sondern - im Gegenteil - einen eigenständigen Status erhalten (ähnlich wie bei der nachträglichen Exaktifizierung) und als eigener Inhalt, und nicht als notwendige/lästige Zwischenstufe behandelt werden (können) - wenn man sich dieses Ziel setzen will (etwa in einem leistungsdifferenzierten Unterricht). Dabei könnten etwa die unter 2.3 angeführten Zugänge wieder aufgegriffen und die Definitionen entsprechender Begriffe miteinander verglichen werden - eine günstige Möglichkeit, eine monotheoretische Sichtweise hintanzuhalten und einen genuinen Beitrag zum Thema "Begriffsbildung" zu leisten.

4 Literatur

Buchberger, B.: Why Should Students Learn Integration Rules?
RISC-Linz Technical Reports No. 89-7.0, University of Linz, 1989

Kutzler, B.: DERIVE - The Future of Teaching Mathematics
The International DERIVE Journal, Vol 1, No 1, 1994, S. 37 - 48