BACK

STOCHASTIK mit DERIVE

Hypothesentests und Vertrauensintervalle

H.-J. Kayser

Wer DERIVE kennt, weiß, daß sich Einsatzmöglichkeiten dieses Programms im Bereich *Analysis* geradezu aufdrängen: Für Kurvendiskussionen, Taylorentwicklungen, Differentialgleichungen u.v.a.m. stehen fertige Tools zur Verfügung bzw. sind solche problemlos zu erstellen. Neben der Analysis interessieren uns Schulleute für die SII aber auch die Bereiche Stochastik und Lineare Algebra/Analytische Geometrie. Und hier - vor allem im Bereich der *Schulstochastik* - ist DERIVEs Angebot auf den ersten Blick ein wenig dünn. Doch latent - das soll im folgenden an den nicht trivialen Bereichen *Hypothesentests, OC-Kurven und Vertrauensintervalle* gezeigt werden - ist alles vorhanden.

1. Hypothesentests

Fig. 1 - Fig. 4 zeigen einige typische Bilder zu diesem Themenbereich (X binomialverteilt mit den Parametern n = 300 und p = 0,6, Signifikanzniveau: α = 0,05). Natürlich kann man solche Abbildungen auch in den entsprechenden Lehrbüchern finden. Die Arbeit mit DERIVE aber bietet den entscheidenden Vorteil, daß man schnell und mit geringem Aufwand Material erzeugen kann, das genau zum laufenden Unterricht paßt, und daß man insbesondere auf Schülerfragen und -probleme spontan reagieren kann.
Im unteren Fenster von Fig. 1 - Fig. 3 steht jeweils die DERIVE-Anweisung, im oberen das Ergebnis. In Fig. 4 wurden die drei Fälle in einer Graphik untergebracht. Hier sieht man im Fenster 1 die DERIVE-Anweisungen zur Berechnung der Ablehnungsbereiche und der Graphikdaten, die Fenster 2, 3 und 4 zeigen die zugehörigen Graphiken.

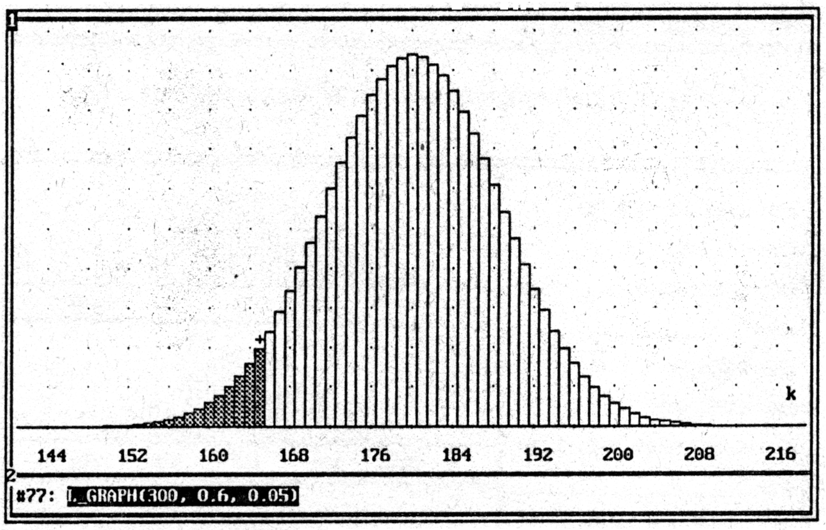

Fig. 1 .Ablehnungsbereich für einen linksseitigen Test

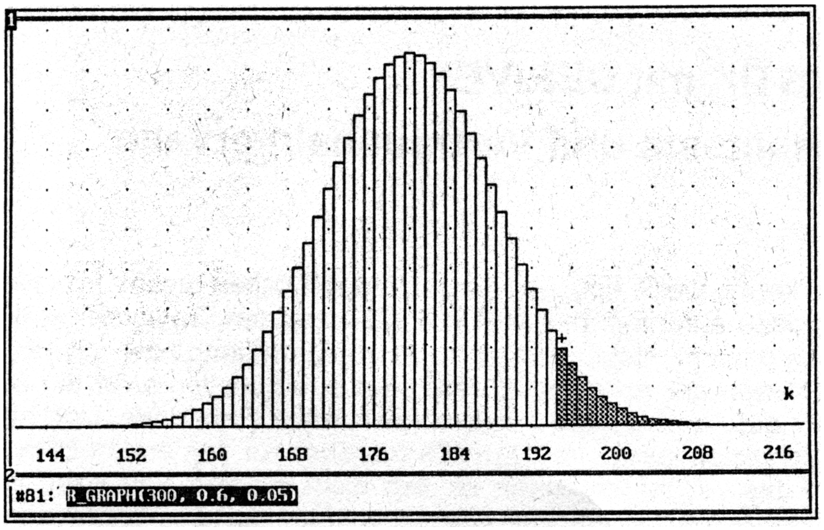

Fig. 2 Ablehnungsbereich für einen rechtsseitigen Test

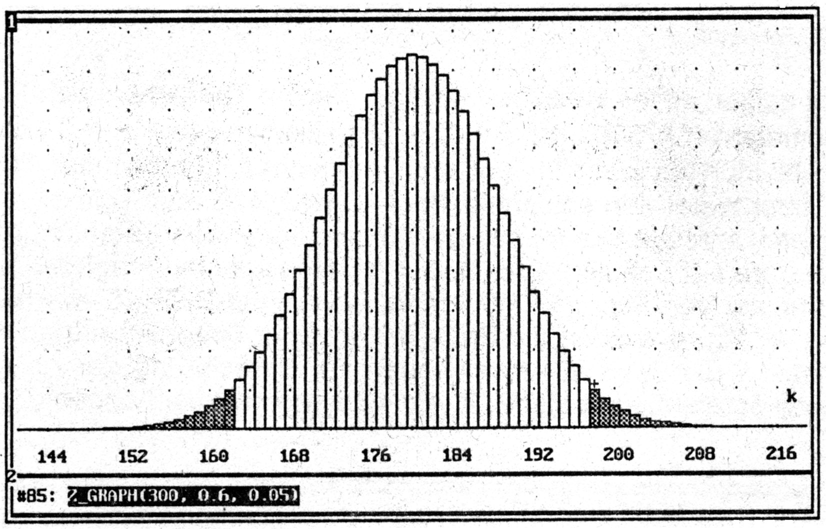

Fig. 3 Ablehnungsbereich für einen zweiseitigen Test

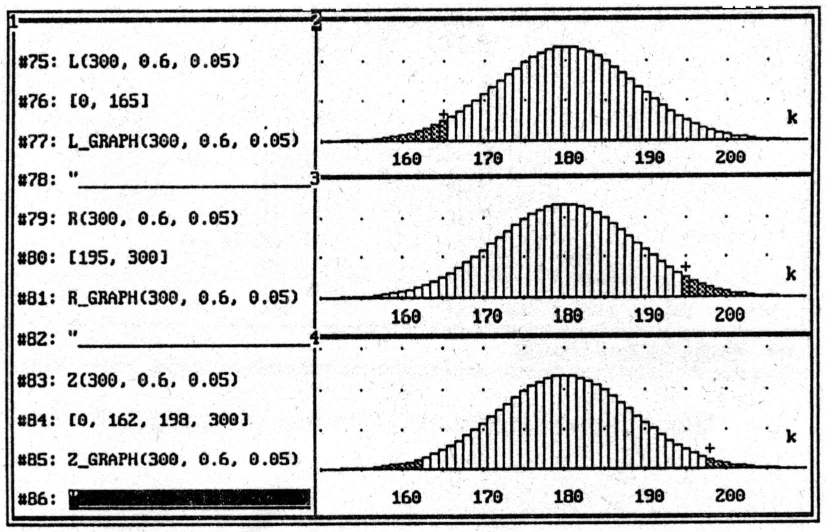

Fig. 4 Links-, rechts-, und zweiseitiger Test

Damit DERIVE Ablehnungsbereiche für uns berechnet und Graphen wie die in Fig. 1 - Fig. 4 gezeigten für uns zeichnet, braucht man nur die oben bereits angesprochenen Funktionen [z.B. L(n, p, α) und L_GRAPH(n, p, α)] zu programmieren!
Sehen wir uns einen Auszug aus der Datei HYP_UT (HYPothesentest_UTility), die diese Funktionen enthält, einmal an !
Ein wenig lästig war die Programmierung der Umkehrfunktion Φ_{inv} zu Φ (vgl. Fig. 5, Zeile #11). HISTO(n,p) (vgl. Fig. 5, Zeile #16) erzeugt Histogramme zu einer $B_{n;p}$-verteilten Zufallsgröße, HI_SCHRAFF (Fig. 5, Zeile # 20) sorgt für die Schraffierung bzw. Färbung der Ablehnungsbereiche. Die übrigen Programmzeilen erklären sich selbst. An den aufgeführten Beispielen erkennt man, wie mit den Funktionen zu arbeiten ist.

#1: "------- Stochastik: Hypothesentest, OC-Kurven, Gütefunktionen --------------------

#2: "- - - - Hilfsfunktionen -"

#3: $\text{BERN}(n, p, k) := \text{COMB}(n, k)\cdot p^{k}\cdot(1 - p)^{n-k}$

#4: $\Phi(x) := \text{NORMAL}(x, 0, 1)$

#5: $\text{PB}(n, p, a, b) := \sum_{m\_=a}^{b} \text{BERN}(n, p, m\_)$

#6: $\text{PBA}(n, p, a, b) := \Phi\left(\frac{b+0.5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0.5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$

#7: [a0 := 2.51551, a1 := 0.802853, a2 := 0.010328]

#8: [b1 := 1.43278, b2 := 0.189269, b3 := 0.001308]

#9: $W(y) := \sqrt{(-2\,\text{LN}(y))}$

#10: $V(y) := \frac{(a2\cdot W(y) + a1)\cdot W(y) + a0}{((b3\cdot W(y) + b2)\cdot W(y) + b1)\cdot W(y) + 1} - W(y)$

#11: $\Phi\text{INV}(y) := \text{IF}(y > 0 \text{ AND } y < 1, \text{IF}(y > 0 \text{ AND } y \le 0.5, V(y), - V(1 - y)))$

#12: $\text{RECHTECK}(x\_, b, h) := \begin{bmatrix} x\_ & 0 \\ x\_ + b & 0 \\ x\_ + b & h \\ x\_ & h \\ x\_ & 0 \end{bmatrix}$

#13: HISTO_RECHTECK(n, p, k) := RECHTECK(k - 0.5, 1, BERN(n, p, k))

#14: $\text{U\_}(n, p) := \text{FLOOR}(n\cdot p - 4\cdot\sqrt{(n\cdot p\cdot(1 - p))})$

#15: $\text{O\_}(n, p) := \text{FLOOR}(n\cdot p + 4\cdot\sqrt{(n\cdot p\cdot(1 - p))}) + 1$

#16: HISTO(n, p) := IF(n·p·(1 - p) > 9, VECTOR(HISTO_RECHTECK(n, p, k), k, U_(n, p), O_(n, p)), VECTOR(HISTO_RECHTECK(n, p, k), k, 0, n))

#17: "Markierungsstrich der Länge 2l an der Stelle k:"

#18: $\text{MARKE}(k, l) := \begin{bmatrix} k & -l \\ k & l \end{bmatrix}$

#19: "Histogramm-Schraffierung:"

```
#20: HI_SCHRAFF(n, p, a, b, d) :=

        VECTOR([[t, 0], [t, BERN(n, p, FLOOR(t + 0.5))]], t, a - 0.5, b + 0.5, d)

#21: "(n, p: Parameter der Binomialverteilung, a, b: Beginn, Ende, d: Strichabstand)"
#22: "- - - - Ende der Hilfsfunktionen - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -"
#23: "------- Ablehnungsbereiche (für σ > 3) ---------------------------------------------------"
#24: "------- Linksseitiger Test (L_ bedeutet die Grenze, L den Bereich):      "
#25: L_(n, p, α) := FLOOR(n·p - 0.5 - ΦINV(1 -α)·√ (n·p·(1 - p)))
#26: L(n, p, α) := [0, L_(n, p, α)]
#27: "------- Rechtsseitiger Test:"
#28: R_(n, p, α) := FLOOR(n·p + 0.5 + ΦINV(1 - α)·√ (n·p·(1 - p))) + 1
#29: R(n, p, α) := [R_(n, p, α), n]
#30: "------- Zweiseitiger Test:"
#31: ZL_(n, p, α) := L_[n, p, α/2]
#32: ZR_(n, p, α) := R_[n, p, α/2]
#33: Z(n, p, α) := [0, ZL_(n, p, α), ZR_(n, p, α), n]
#34: "----- Ablehnungsbereiche graphisch --------------------------------------------------"
#35: "d: Abstand der senkrechten Schraffierungsstriche; Vorschlag: "
#36: d := 0.1
#37: L_GRAPH(n, p, α, d) := [HISTO(n, p),
                 HI_SCHRAFF(n, p, L_(n, p, α) - 2·√ (n·p·(1 - p)), L_(n, p, α), d)]
#38: R_GRAPH(n, p, α, d) := [HISTO(n, p),
                 HI_SCHRAFF(n, p, R_(n, p, α), R_(n, p, α) + 2·√ (n·p·(1 - p)), d)]
#39: Z_GRAPH(n, p, α, d) := [HISTO(n, p),
             HI_SCHRAFF(n, p, ZL_(n, p, α) - 1.5· √ (n·p·(1 - p)), ZL_(n, p, α), d),
             HI_SCHRAFF(n, p, ZR_(n, p, α), ZR_(n, p, α) + 1.5· √ (n·p·(1 - p)), d)]
#40: "Beispiel:"
#41: R_GRAPH(300, 0.6, 0.05, 0.1)
#42: "Term vor dem P lotten mit appro X umformen ! Im Graphikfenster unter"
#43: "O ptions - S tate - Mode: connected und size: small und"
#44: "unter O ptions - C olor - Auto: no  einstellen !"
#45: "Nach Plotten zurück ins Algebrafenster, vereinfachten HISTO-Term"
#46: "markieren und mit anderer Farbe erneut plotten !"
#47: "-------------------------------------------------------------------------------------------"
```

Fig. 5 Die DERIVE-Datei HYP_UT (gekürzt)

2. OC-Kurven

Fig. 6 verdeutlicht, wie man dank DERIVE mit Hilfe geeigneter Graphiken seinen Schülern den „Fehler zweiter Art" gut erläutern und damit zugleich den Weg zu den OC-Kurven ebnen kann.

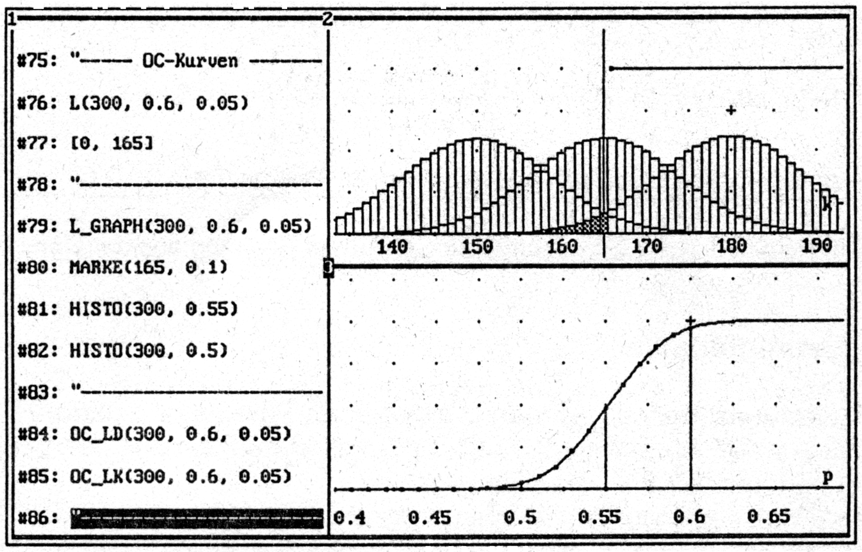

Fig. 6 Zum Fehler zweiter Art und OC-Kurve
(linksseitiger Test)

Fig. 7 zeigt OC-Kurven für zweiseitige Tests (diskret und kontinuierlich) und Graphen zu OC(p) für verschiedene n. Aus Fig. 8 geht hervor, wie die Funktionen zur Erzeugung der gezeigten Graphiken programmiert wurden.

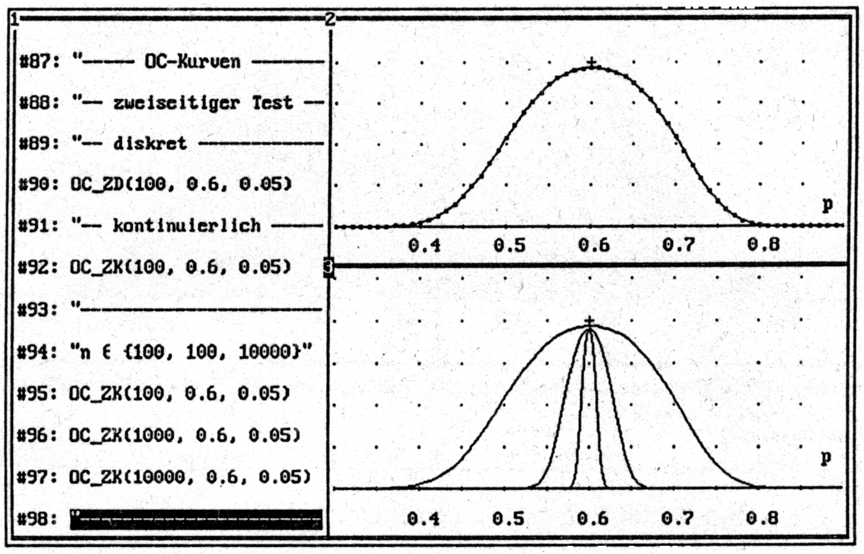

Fig. 7 OC-Kurven für einen zweiseitigen Test

#48: "Im folgenden: D für diskret, K für kontinuierlich!"

#49: "------- OC-Funktionen/linksseitiger Test ---"

#50: OC_L(n, p0, l) := VECTOR([p, IF(n·p·(1 - p) > 9, PBA(n, p, l + 1, n), PB(n, p, l + 1, n))], p, 0.01, p0, 0.01)

#51: OC_LD(n, p0, α) := VECTOR([p, IF(n·p·(1 - p) > 9, PBA(n, p, L_(n, p0, α) + 1, n), PB(n, p, L_(n, p0, α) + 1, n))], p, 0.01, p0, 0.01)

#52: $\mathrm{OC\_LK}(n, p0, \alpha) := 1 - \Phi\left[\dfrac{\mathrm{L\_}(n,\ p0, \alpha) + 0.5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right]$

(OC-Funktionen für rechtsseitigen und zweiseitigen Test analog)

Fig. 8 Funktionen zur Erzeugung von OC-Kurven (Auszug aus der Datei HYP_UT)

3 Vertrauensintervalle

Das 99%-Vertrauensintervall[1] für den unbekannten Parameter p (einer $B_{n;p}$-verteilten Zufallsgröße X) zum Stichprobenergebnis x besteht bekanntlich aus *den* p-Werten, für die x in dem zu p gehörenden 99%-Bereich liegt.
Die in dieser Form Anfänger leicht verwirrende Aussage läßt sich mit DERIVEs Hilfe einfach veranschaulichen: Fig. 9 zeigt u.a. die Gipfel der beiden 99%-Histogrammglocken, die das Stichprobenergebnis gerade noch erfassen. Dem Abstand der zugehörigen Erwartungswerte np_1 und np_2 entspricht das gesuchte Vertrauensintervall $[p_1; p_2]$.

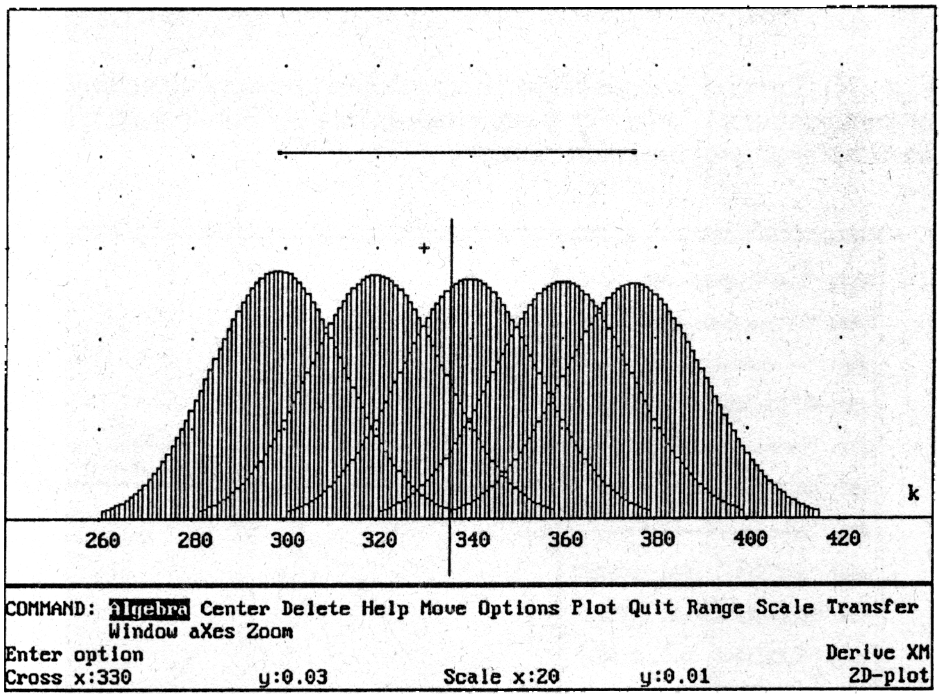

Fig. 9 Zur Erläuterung des Begriffs „Vertrauensintervall"

[1] Analog ist ein (100γ)%-Vertrauensintervall definiert.

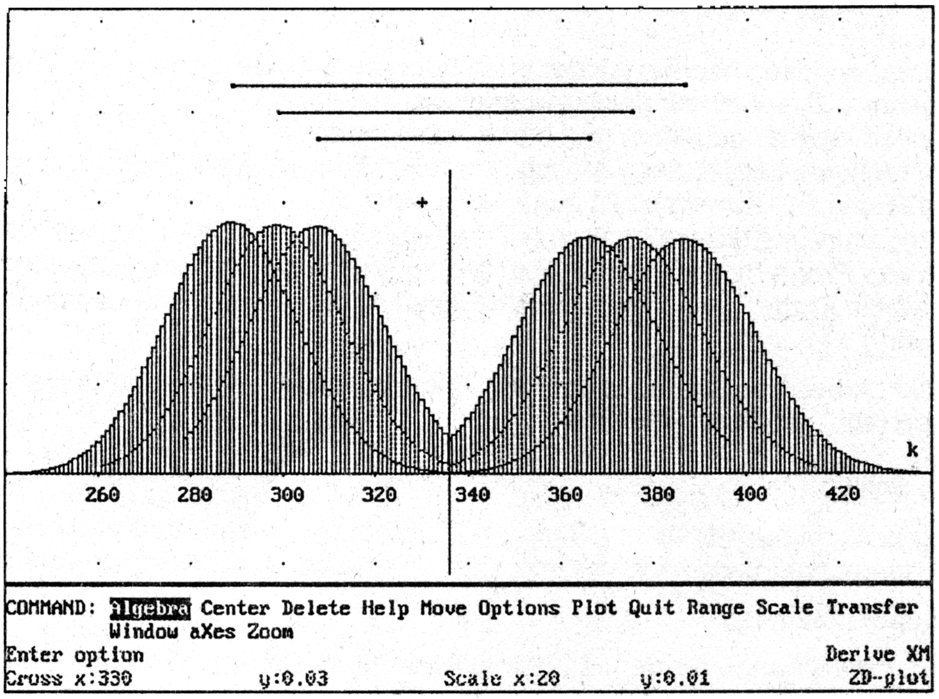

Fig. 10 Vertrauensintervalle für verschiedene Vertrauenswahrscheinlichkeiten

Auch bei der Herleitung der bekannten Ungleichung

$$|n\,p - x| \leq \Phi_{inv}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\sqrt{np(1-p)}$$

zur Berechnung von Vertrauensintervallen kann DERIVE mit übersichtlichen Graphiken helfen. Und natürlich übertragen wir die Lösung dieser Ungleichung in konkreten Fällen ebenfalls DERIVE. Eine entsprechend programmierte Funktion I(n, γ, x) erledigt das Problem auf Tastendruck. Unbefriedigende und Anfänger leicht verunsichernde Näherungsverfahren werden überflüssig.

4 Fazit

Ich habe in diesem Beitrag bewußt Themen aus der Schulstochastik gewählt, die in didaktischer Hinsicht nicht ganz einfach sind. Gerade die Bereiche „Fehler zweiter Art", „OC-Kurven" und „Vertrauensintervalle" bereiten Schülern bekanntlich oft Schwierigkeiten. Nicht selten wird der Begriff „Vertrauensintervalle" auch falsch verstanden.

Ich hoffe, daß die obigen Ausführungen deutlich machen konnten:

1. Mit DERIVE werden komplexe Begriffe und Sachverhalte auch schwächeren Schülern zugänglich, da DERIVE erlaubt, im Unterricht vorwiegend auf der graphischen Ebene zu arbeiten, und so Begriffe viel besser erklärbar macht.

   Veranschaulichendes Material steht auf Tastendruck zur Verfügung; Lehrer und Schüler können sich auf die Erarbeitung der Begriffe konzentrieren, da DERIVE von ablenkenden, mühsamen Berechnungen befreit. Verstehen und Berechnen können getrennt werden.

2. Dank DERIVE kann man sonst oft vernachlässigte Lernziele anstreben und erreichen:
   - Graphen lesen können (sicher auch über die Schulzeit hinaus von Bedeutung),
   - mehrere Graphen vergleichend analysieren können,
   - Zusammenhänge sehen und darstellen können,
   - Berechnungsergebnisse kritisch beurteilen können (gerade dadurch, daß DERIVE die OC-Kurven leicht zugänglich macht !),
   - Algorithmen erläutern können (im Gegensatz zu PASCAL oder BASIC bleibt DERIVEs Programmiersprache dicht genug an der mathematischen Oberfläche, so daß die Frage: „Wie macht DERIVE das? “ zufriedenstellend beantwortet werden kann.).
3. Mit der „Arbeit am Graphen“ kann der Mathematikunterricht auch fächerübergreifend wirken (vgl. „Arbeit am Text“!).

Und zum Schluß !

Man mag ja skeptisch (ist es nur Skepsis?!) darauf verweisen, daß zur Zeit nicht einmal der Taschenrechner didaktisch voll integriert ist, und bei den CASn zur Vorsicht mahnen.

Ich behaupte trotzdem:

DERIVE ist ***die*** Chance für den Mathematikunterricht und hat das Zeug, den schlechten Ruf des Fachs Mathematik vergessen zu machen.

Hoffen wir, daß Bekanntheits- und Beliebtheitsgrad dieses Programms schneller zunehmen als wir das von anderen Neuerungen im Schulbereich gewohnt sind - vielleicht dauert es ja dieses Mal nicht 10 sondern nur 9 Jahre!?