BACK

Lebenslauf einer Pfandflasche

Ein Unterrichtsbeispiel aus der 12. Klasse

Benno Grabinger Neustadt (Weinstraße)

Motivation für Düsseldorfer Schüler:

Die Toten Hosen: "Damenwahl"

Refrain aus dem "**Altbierlied**":

Ja sind wir im Wald hier, wo bleibt unser Altbier
wir haben in **Düsseldorf** die längste Theke der Welt.
Ja sind wir im Wald hier, wo bleibt unser Altbier
wo ist denn der Held, der mit seinem Geld die
Runde bestellt?

Gerade in Düsseldorf stellen sich deshalb Fragen wie:

Wie viele Leben hat eine Pfandflasche?

Wie lange dauert es, bis ein Bierkasten leer ist?

In der Unterrichtsreihe "Lebenslauf einer Pfandflasche" wird für das Pfandflaschenproblem ein Modell erstellt. Zunächst werden Materialien präsentiert, welche die Überlegenheit der Pfandflasche im Vergleich zur Einwegflasche hinsichtlich Energieverbrauch zur Herstellung und Vorteile bei der Abfallbeseitigung aufzeigen. Diese Überlegenheit besteht aber nur dann, wenn die Wiederverwendung der Pfandflasche eine bestimmte Mindestanzahl aufweist. Ansonsten machen Reinigungs- und Rückführungskosten der Flaschen die zuvor angedeuteten Vorteile zunichte.

Die Pfandflaschenproblematik führt auf Fragen wie:

- Wie groß ist die Rückgabewahrscheinlichkeit für eine Pfandflasche?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Pfandflasche mindestens n mal benutzt wird?
- Wie oft wird eine Pfandflasche durchschnittlich wiederverwendet?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Rückgabewahrscheinlichkeit für Pfandflaschen und der durchschnittlichen Anzahl der Benutzungen der Flasche?

Nach Entwurf eines einfachen Modells werden Antworten auf diese Fragen zunächst mit Hilfe von Simulationen gesucht Diese Simulationen werden mit Hilfe von DERIVE durchgeführt. Dabei wird ausgehend von einfachen Methoden schrittweise zu immer komplexeren Verfahren übergegangen. Vorlagen in Form von Arbeitsblättern zeigen, wie sich diese Verfahren für den Unterricht aufbereiten lassen.

Die in den Simulationen gewonnenen Erkenntnisse führen in einem sich anschließenden Theorieteil zur geometrischen Verteilung. Es wird dort gezeigt, wie die Verwendung der Algebrafähigkeiten von DERIVE lästige und langwierige Rechnungen überflüssig macht.

Arbeitsblatt 1

Simulation mit einer Tabelle von Zufallszahlen

Zufallszahlen

12920	37375	82211	84059	30983	25736	83674	36822	57880	54822
98115	34078	69321	37344	34876	26423	12698	57308	24210	91260
80758	82137	96662	23487	33816	17475	75844	93090	56434	34356
33015	11804	59519	23422	76918	76058	63761	55873	77311	78367
25362	55858	45625	04372	89983	13960	21184	57711	85853	96499
36441	79914	91978	30312	59642	57497	42380	67716	38375	33457
52314	61327	92436	65346	77392	03436	29450	97119	41554	09621
81677	36930	94829	51285	87454	58083	86810	66807	65702	65304
66800	05993	56931	93547	46547	87517	29193	31492	86516	74037
72416	86946	91638	94674	29543	36325	27464	69543	37938	25404
92671	16019	79473	13525	08845	41433	62752	78449	13500	51880
85898	24042	67245	31823	53341	57976	11053	74197	45050	31642
34569	65673	61648	59453	41385	56799	93836	59736	22224	71683
89577	84385	71981	36921	17464	29476	11539	34444	49729	44025
00314	07984	13304	79080	50456	77836	82398	44332	78650	43613
11008	64428	56452	79673	28812	52188	45097	52913	48877	40892
25720	17607	60624	42851	60918	66993	06479	26422	48602	46273
65656	28673	54077	56739	93512	45884	31266	05688	89891	69057
69051	81835	94927	56646	23634	60898	35712	61670	22881	71041
72291	55413	53567	72880	16400	14900	67477	33712	21406	66313

Es wird angenommen, daß die betrachtete Flasche mit p=0,1 nicht mehr zurückgegeben wird.

1. Wie läßt sich durch Ziehen einer Zufallszahl nachbilden, ob die gerade benutzte Flasche wieder zurückgegeben wird?

2. Simuliere den Lebenslauf einer Flasche, d.h. ziehe solange Zufallszahlen, bis sich erstmals ergibt, daß die Flasche nicht mehr zurückgegeben wird.

3. Wiederhole den unter 2. beschriebenen Vorgang möglichst oft. (Simulationen der Mitschüler sammeln) Ermittle für jede Simulation die Umlaufzahl. Bilde den Mittelwert.

Eine mögliche Lösung von Aufgabe 1

Wandle die gezogene Zahl - durch Vorschalten von 0 in ein Element des Intervalls [0 ; 1] um.

Beispiel: Die ausgewählte Zahl: 56739 wird in x=0,56739 umgewandelt.

Da das Ereignis

A: "Die Flasche wird nicht zurückgegeben"

mit p=0,1 eintritt, ergibt sich folgende Interpretation:

A tritt ein, falls $x \in [0 ; 0{,}1]$,
A tritt nicht ein, falls $x \in]0{,}1 ; 1]$)

Simulation in DERIVE

In **DERIVE** läßt sich die Erzeugung der Zufallsgröße Z mit der **IF**-Funktion erreichen:

z := IF(RANDOM(1) ≤ p , 0 , 1)

Liefert die Funktion **RANDOM(1)** einen Wert, der kleiner oder gleich p ist, dann nimmt z den Wert 0 an, sonst liefert z den Wert 1.
Anwendung von **Simplify** oder von **approXimate** auf diese Zeile löst die Berechnung aus.
Die Funktionsweise von **z := IF(RANDOM(1) ≤ p , 0 , 1)** entspricht damit genau dem in der Lösung von Aufgabe 1 beschriebenen Vorgehen.

Auf dem folgenden Arbeitsblatt wird das Ziehen von Zufallszahlen "per Hand" auf die gerade dargestellte Art und Weise von **DERIVE** ersetzt.

Arbeitsblatt 2

Aufgabe 4

(Vergleiche zur Durchführung der Schritte 1-5 den unten abgebildeten DERIVE-Bildschirm.)

1. Weise der Variablen **p** den Wert **0.1** zu:
2. Gib die Zeile **z := IF(RANDOM(1) ≤ p , 0 , 1)** ein.
3. Stelle den Leuchtbalken auf die Zeile **z := IF(RANDOM(1) ≤ p , 0 , 1)** und wende **Simplify** an.
4. Wiederhole Schritt 3 solange, bis erstmals die Zahl **0** als Wert zurückgegeben wird.
5. Ermittle die Nummer des Experimentes, bei dem die Null erscheint.

Die Nummer des Experimentes ist:

```
1:   "p gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Flasche nicht"
2:   "mehr zurückgegeben wird."
3:   p := 0.1
4:   z := IF(RANDOM(1) ≤ p, 0, 1)
5:   1
6:   1
7:   1
8:   1
9:   1
10:  1
11:  0
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Simp(4)                                Free:100% Ins          Derive Algebra
```

Aufgabe 5

Hole bei den Mitschülern möglichst viele Simulationsergebnisse von Aufgabe 4 ein. Bestimme aus diesen Daten einen Näherungswert für die mittlere Rückgabezahl der Pfandflasche.

Simulation Nr.	1	2	3	4										
Zahl der Rückgaben														

Die "Mittlere Umlaufdauer" der Flasche ist:

Aufgabe 6

Ermittle für verschiedene Werte von p die mittlere Umlaufdauer der Flasche. Ändere dazu die Zeile #3 des abgebildeten **DERIVE**-Bildschirms. Gehe dann wie in Aufgabe 4 vor. Stelle die Umlaufdauer in Abhängigkeit von p graphisch dar.

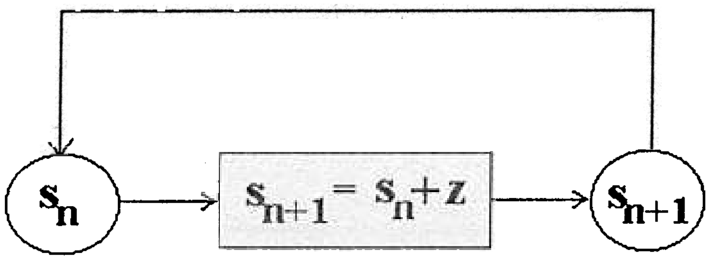
Vereinfachung des Verfahrens

Die mühsame Simulation auf Arbeitsblatt 2 soll nun von **DERIVE** übernommen werden.
Bei der Simulation, die auf dem abgebildeten **DERIVE**-Bildschirm (Arbeitsblatt 2) dargestellt ist, folgen auf 6 Einsen die erste Null, d.h. es ergab sich die Folge 1,1,1,1,1,1,0.

In einer Variablen s soll nun die Gesamtzahl aller Einsen der jeweils bis dahin durchgeführten Einzelexperimente stehen.
s hat zu Beginn der Simulation den Wert 0. Den weiteren Verlauf der Werte von s kann man bei dem betrachteten Beispiel 1,1,1,1,1,1,0 der folgenden Tabelle entnehmen.

Ergebnis z der Einzelsimulation		1	1	1	1	1	1	0
Wert von s	0	1	2	3	4	5	6	7

Der neue Wert von s ergibt sich als Summe aus dem vorherigen Wert von s und dem Ergebnis z der Simulation. Beschreibt man diesen Zusammenhang mit einer Iterationsformel, so erhält man die Rechenvorschrift $s_{n+1} = s_n + z$, mit $s_1 = 0$.
Das nächste Diagramm veranschaulicht diesen Prozeß:



Diese Iteration wird durch die **ITERATES**-Anweisung **ITERATES(s+z , s , 0)** durchgeführt.

ITERATES führt die Iteration solange durch, bis der in der Iteration neu berechnete Wert erstmals einem schon in der Iteration dagewesenen Wert gleich wird.

Im vorliegenden Zahlenbeispiel wäre das Ergebnis von **ITERATES** der Vektor [0,1,2,3,4,5,6,7,7], d.h. die Flasche wurde 7 mal zurückgegeben, denn beim 8-ten Iterationsschritt hat z den Wert 0 geliefert.

Verwendet man statt **ITERATES(s+z , s , 0)** den Ausdruck **ITERATE(s+z , s , 0)**, so wird statt des ganzen Vektors nur dessen letztes Element zurückgegeben. (Im Beispiel die Zahl 7)
Diese Zahl gibt an, wie oft die Flasche zurückgegeben wird.

Zur Durchführung einer großen Zahl von Simulationen eignet sich die **VECTOR**-Funktion.
VECTOR(ITERATE(s+z,s,0),i,1,10) erzeugt einen Vektor, der die Zahl der Rückgaben von 10 Simulationen liefert.

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 7

Gib die ersten drei Zeilen so in **DERIVE** ein, wie es der unten abgebildete **DERIVE**-Bildschirm zeigt. Wende dann auf Zeile **#3** mehrmals **Simplify** an.
Führe durch Anwendung von Simplify mehrere Simulationen durch. Vergleiche dazu den abgebildeten **DERIVE**-Bildschirm:

```
1:   p := 0.1

2:   z := IF(RANDOM(1) ≤ p, 0, 1)

3:   ITERATES(s + z, s, 0)

4:   [0, 1, 1]

5:   [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7]

6:   [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9]

7:   ITERATE(s + z, s, 0)

8:   3

9:   18

10:  15

11:  4

12:
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Simp(7)                               Free:100% Ins          Derive Algebra
```

Aufgabe 8

8.1 Erzeuge (mehrmals) durch **VECTOR(ITERATE(s+z,s,0),i,1,10)** einen Vektor, der die Ergebnisse von 10 Simulationen enthält.

8.2 Berechne aus den in 8.1 erzeugten Vektoren den Mittelwert der Umlaufdauer.

8.3 Benutze die **AVERAGE**-Funktion um den Mittelwert von 500 Simulationen zu berechnen: **AVERAGE(VECTOR(ITERATE(s+z,s,0),i,1,500))** .

Lösung von Aufgabe 8

Eine mögliche Bearbeitung von Aufgabe 8 zeigt der folgende DERIVE-Bildschirm.
Fünfmalige Anwendung von **Simplify** auf Zeile #3 liefert 50 Simulationen. Mit dem Taschenrechner ergibt sich daraus ein Mittelwert von 7,2 .
In Zeile #9 wird die Funktion **mittelwert** definiert. Wendet man **approX** auf **mittelwert** an, so erhält man jeweils den Mittelwert aus 500 Simulationen. Es ergibt sich dabei eine mittlere Umlaufdauer von etwa 9.

```
1:   p := 0.1
2:   z := IF(RANDOM(1) ≤ p, 0, 1)
3:   VECTOR(ITERATE(s + z, s, 0), i, 1, 10)
4:   [14, 0, 7, 4, 15, 18, 3, 9, 7, 1]
5:   [11, 7, 20, 23, 4, 6, 0, 0, 5, 16]
6:   [2, 8, 3, 3, 3, 7, 16, 4, 14, 1]
7:   [2, 3, 25, 32, 9, 3, 2, 2, 3, 9]
8:   [4, 1, 0, 7, 2, 2, 2, 4, 8, 3]
9:   mittelwert := AVERAGE(VECTOR(ITERATE(s + z, s, 0), i, 1, 500))
10:  mittelwert
11:  9
12:  8.99
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 16.0 seconds
Approx(10)                          Free:98%  Ins          Derive Algebra
```

Arbeitsblatt 4

Aufgabe 9

Ändere den Wert von p mehrmals und führe die Aufgabe 8.3 erneut durch. Fülle eine Tabelle der folgenden Form aus.

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Mittelwert der Umlaufdauer u					

Aufgabe 10

Erzeuge eine Tabelle wie in Aufgabe 9. Dabei soll der Wert von p zwischen 0,1 und 0,5 mit der Schrittweite 0,02 variiert werden. Die sich ergebenden Wertepaare (p,u) sollen graphisch dargestellt werden.

Aufgabe 11

Wie hängt die Umlaufdauer u von p ab?

1. Für sehr kleine Werte von p wird die Flasche fast immer zurückgegeben, d.h. für p gegen Null ist eine senkrechte Asymptote zu erwarten.
2. Für den Maximalwert, den p annehmen kann, nämlich p=1, erlebt die Flasche keine einzige Rückgabe, d.h. die Umlaufdauer muß Null sein.

Diese beiden Feststellungen führen zu der Vermutung, daß der Zusammenhang zwischen Umlaufdauer u und Wahrscheinlichkeit p durch eine verschobene Hyperbel der Form $f(p) = \frac{1}{p} - c$ gegeben sein könnte. Welchen Wert müßte c haben, damit eine Übereinstimmung mit der zuvor getroffenen Aussage 2 besteht?

Zeichne verschobene Hyperbeln der Form

$$f(p) = \frac{1}{p} - c \,; \quad c \in \{0 \,;\, 0{,}5 \,;\, 1 \,;\, 1{,}5 \,;\, 2\}$$

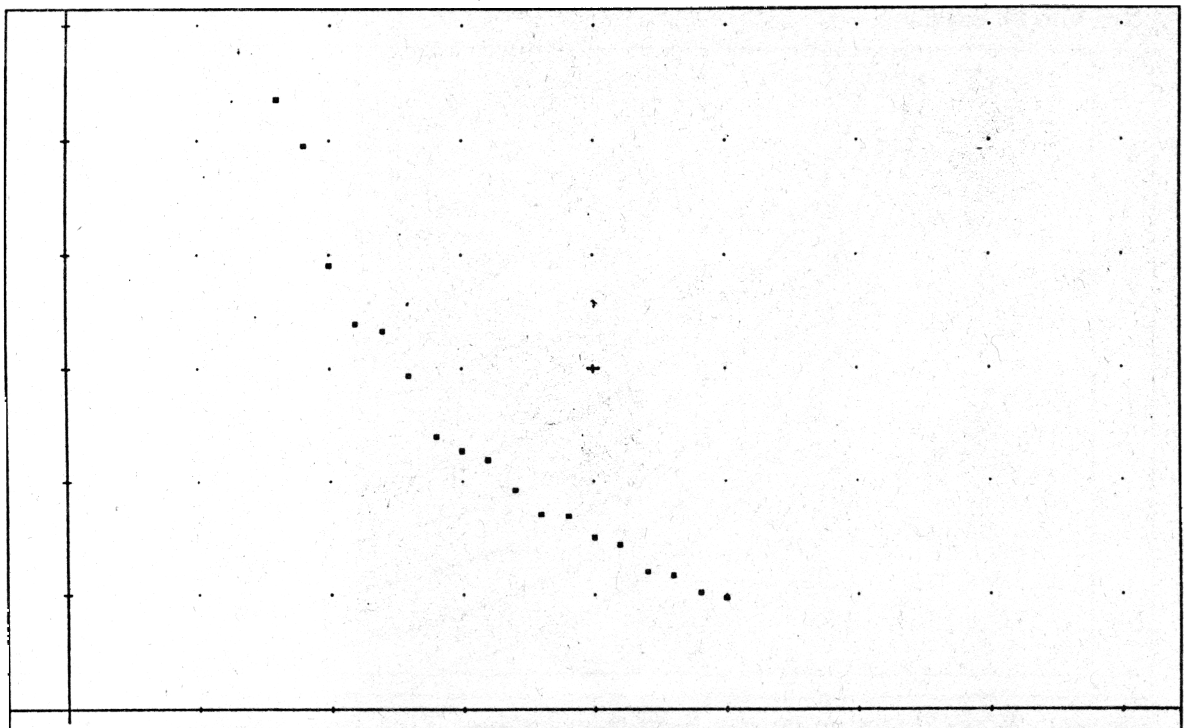
und vergleiche mit den aus der Simulation gewonnenen Werten.

Lösung von Aufgabe 9 Zeilen #1-#4

Lösung von Aufgabe 10 Zeilen #1-#6, die Rechenzeit kann einige Minuten dauern.

```
1:   z := IF(RANDOM(1) ≤ p, 0, 1)

2:   mittelwert := AVERAGE(VECTOR(ITERATE(s + z, s, 0), i, 1, 500))

3:   VECTOR([p, mittelwert], p, 0.1, 0.5, 0.1)

     ┌ 0.1  8.758 ┐
     │ 0.2   3.85 │
4:   │ 0.3  2.214 │
     │ 0.4  1.516 │
     └ 0.5   1.06 ┘

5:   VECTOR([p, mittelwert], p, 0.1, 0.5, 0.02)

6:   [[0.1, 9.884], [0.12, 7.42], [0.14, 6.318], [0.16, 5.352], [0.18, 4.946], [

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 136.2 seconds
Approx(5)                               Free:98%  Ins          Derive Algebra
```

Anwendung von **Plot** auf die Zeile #6 führt zur gewünschten graphischen Darstellung:



```
COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
         Zoom
Enter option
Cross x:0.4          y:3          Scale x:0.1      y:1          Derive 2D-plot
```

Lösung von Aufgabe 11
Anwendung von **Simplify** auf die Zeile #7 liefert die zu untersuchende Funktionenschar in Zeile #8.

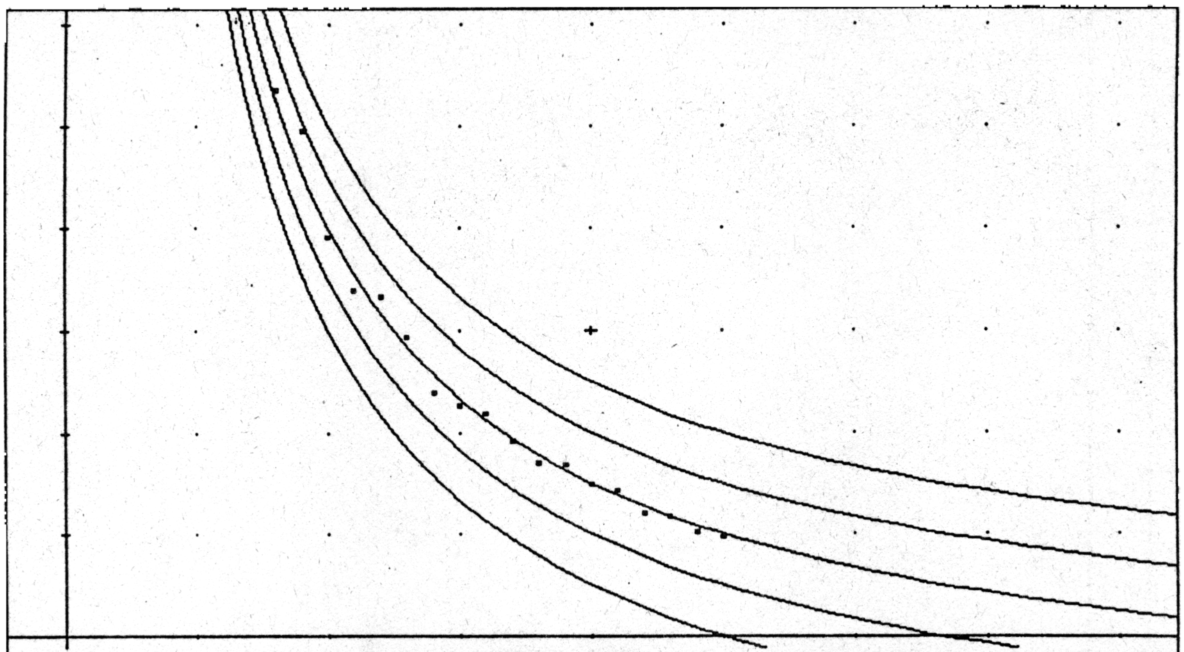
```
2:   mittelwert := AVERAGE(VECTOR(ITERATE(s + z, s, 0), i, 1, 500))

3:   VECTOR([p, mittelwert], p, 0.1, 0.5, 0.1)

      ┌ 0.1  8.758 ┐
      │ 0.2   3.85 │
4     │ 0.3  2.214 │
      │ 0.4  1.516 │
      └ 0.5   1.06 ┘

5    VECTOR([p, mittelwert], p, 0.1, 0.5, 0.02)

6    [[0.1, 9.884], [0.12, 7.42], [0.14, 6.318], [0.16, 5.352], [0.18, 4.946], [
```

$$7:\quad \mathrm{VECTOR}\left[\frac{1}{x} - c,\ c,\ 0,\ 2,\ 0.5\right]$$

$$8:\quad \left[\frac{1}{x},\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2},\ \frac{1}{x} - 1,\ \frac{1}{x} - \frac{3}{2},\ \frac{1}{x} - 2\right]$$

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
Simp(7)                                  Free:98%  Ins          Derive Algebra
```

c muß den Wert 1 haben. Das zeigt auch die folgende graphische Darstellung, die durch plotten von #8 entstand.



```
COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
         Zoom
Enter option
Cross x:0.4          y:3          Scale x:0.1       y:1          Derive 2D-plot
```

Theorie

Die Bearbeitung von Aufgabe 11 läßt vermuten, daß die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ die Punktmenge am besten annähert. Daraus würde folgen, daß der gesuchte Zusammenhang zwischen Umlaufdauer u und Wahrscheinlichkeit p durch $u = \frac{1}{p} - 1$ gegeben ist. Läßt sich dieses Ergebnis auch aus der Theorie erhalten?

Mit w(k) werde die Wahrscheinlickkeit dafür bezeichnet, daß die Flasche nach dem k-ten Verkauf nicht mehr zurückgegeben wird. Mit der Pfadregel erhält man:

$$w(k)=p(1-p)^{(k-1)}.$$

Eine Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X=k) = w(k)$, $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ heißt geometrisch verteilt.

Folgende Probleme stellen sich in diesem Zusammenhang:

1. Zeige, daß $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w(k) = 1$ gilt.

2. Berechne die Verteilungsfunktion $P(X \leq n) = \sum\limits_{k=1}^{n} w(k)$.

3. Berechne den Erwartungswert $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, w(k)$ von X.

4. Berechne die Varianz $VAR(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (k - E(X))^2\, w(k)$ von X.

5. Welche Folgerung ergibt sich aus 3. für die Umlaufdauer u der Pfandflasche?

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 12

Definiere in **DERIVE** eine Variable p aus dem offenen Intervall] 0 ; 1 [
Führe dazu folgende Schritte im DERIVE-Menüsystem durch:

Declare:	**Variable**
• **DECLARE VARIABLE name:**	**p**
DECLARE VARIABLE:	**Interval**

(Der folgende Ausschnitt des **DERIVE**-Bildschirms zeigt, wie nach diesen Eingaben noch die Intervallgrenzen einzustellen sind:)

```
DECLARE VARIABLE: Bounds: 0        (<)≤   p  (<)≤  1

Enter right bound
                                      Free:100% Ins
```

Beachte, daß bei der Durchführung der Aufgaben 13-17 die Variable p wie angegeben definiert sein muß!

Aufgabe 13

Definiere - nach der Durchführung von Aufgabe 12 - die Funktion $w(k)=p(1-p)^{(k-1)}$ in **DERIVE**.

Aufgabe 14

Zeige, daß $\sum_{k=1}^{\infty} w(k) = 1$ gilt

a. durch Rechnen in **DERIVE.**
(Die Eingabe der Summe geschieht durch **SUM(w(k), k, 1, inf)**
b. unter Benutzung der Summenformel für die unendliche geometrische Reihe.

Aufgabe 15

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis "Die Flasche wird nicht zurückgegeben" spätestens nach dem n-ten Verkauf eintritt,

a. durch Rechnen in **DERIVE.**
b. mit Hilfe der Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

Aufgabe 16

Wie lange dauert es im Mittel, bis das Ereignis "Die Flasche wird nicht zurückgegeben" eintritt? Bilde dazu den Erwartungswert $\sum_{k=1}^{\infty} k\, w(k)$:

Lasse die Berechnung dieser Summe von **DERIVE** durchführen.

Aufgabe 17

Der in Aufgabe 16 zu berechnende Erwartungswert ist $\frac{1}{p}$. Benutze dieses Ergebnis, um mit Hilfe von **DERIVE** die Varianz $\sum_{k=1}^{\infty} (k - \frac{1}{p})^2\, w(k)$ zu berechnen.

Lösung der Aufgaben 13-16

1: $W(k) := p\,(1-p)^{k-1}$

2: $\sum_{k=1}^{\infty} W(k)$

3: 1

4: $\sum_{k=1}^{n} W(k)$

5: $1-(1-p)^{n}$

6: $\sum_{k=1}^{\infty} k\,W(k)$

7: $\frac{1}{p}$

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.1 seconds
Simp(6)                                  Free:100% Ins          Derive Algebra
```

Als Lösung von Aufgabe 17 ergibt sich $\frac{1-p}{p^2}$.

Aus der Zeile #7 des letzten **DERIVE** - Bildschirma ergibt sich für die Umlaufdauer u einer Pfandflasche:

$u = E(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1.$

Dies steht in guter Übereinstimmung mit den aus der Simulation gewonnenen Ergebnissen.

Es wird nun auch ein Vergleich mit den aus der Praxis beobachteten Werten möglich. In den Materialien des Abschnitts "Einweg- und Mehrwegflaschen" findet sich die Angabe einer Brauerei, daß "die durchschnittliche Rücklaufquote der Flaschen ca 96%-98% beträgt."
Weiter liest man: "Im Laufe ihres Lebens kann eine Pfandflasche ca. 20 mal befüllt und in den Nutzungskreislauf gebracht werden.

Setzt man für u den Wert 20 an, so erhält man aus $u = \frac{1}{p} - 1$ für p: $p \approx 4{,}8\%$. Dem entspricht eine Rückgabequote von $q = 1-p = 1 - 4{,}8\% = 95{,}2\%$. Dies steht in Einklang mit den Angaben der Brauerei.